

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE
LABORATOIRE D'HYDRODYNAMIQUE NAVALE
1, Rue de la Noë 44072 NANTES CEDEX - Tel : 40.37.16.00

**LES PROBLEMES DE DIFFRACTION-RADIATION
ET DE RESISTANCE DE VAGUES : ETUDE
THEORIQUE ET RESOLUTION NUMERIQUE PAR
LA METHODE DES SINGULARITES**

PAR

Gérard DELHOMMEAU *

Le présent document a fait l'objet d'une thèse de
Doctorat ès Sciences, spécialité : hydrodynamique
soutenue le 1er Juillet 1987 à l'Ecole Nationale
Supérieure de Mécanique de Nantes, devant un Jury
composé de :

M.	P. GUEVEL	Président
MM.	J.C. DERN	
	D. EUVRARD	
	J. PIQUET	Examineurs
	M. POGU	
	P. SULMONT	

ISBN : 2-904-633-13-8

* E.N.S.M. - Laboratoire d'Hydrodynamique Navale - Unité Associée au C.N.R.S. 1217
(U.A. 1217) 1, Rue de la Noë - 44072 NANTES CEDEX Tel : 40.37.16.00



SOMMAIRE

Introduction Générale	9
1ère Partie : DIFFRACTION-RADIATION	11
Introduction	13
Notes bibliographiques	15
Chapitre 1 : LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE APPLIQUEES AU PROBLEME DE LA DIFFRACTION-RADIATION AU POINT FIXE .	17
Introduction	17
1.1. - Formulation du problème au premier et au second ordre	17
1.1.1. - Equations du problème	18
1.1.2. - Développements suivant une méthode de perturbation régulière	19
1.2. - Description du mouvement d'un corps solide	25
1.2.1. - Déplacements d'un point	25
1.2.2. - Vitesses	28
1.2.3. - Accélération	29
1.2.4. - Evaluation des intégrales sur un domaine en mouvement solide	29
1.3. - Calcul des pressions et des efforts	30
1.3.1. - Repères utilisés	30
1.3.2. - Positions occupées par la carène au cours de son mouvement	30
1.3.3. - Pressions	31
1.3.4. - Efforts	31
1.3.5. - Moments par rapport à un point O' mobile	32
1.3.6. - Moments par rapport à un point O fixe	34
1.4. - Efforts exercés sur une carène	34
1.4.1. - Forces extérieures	35
1.4.2. - Efforts hydrodynamiques	36
1.4.3. - Efforts hydrostatiques	37
1.4.4. - Intégrales sur S_1	42
1.4.5. - Bilan des efforts	43
1.5. - Efforts d'inertie	47

Chapitre 2 : RESOLUTION DU PROBLEME DE DIFFRACTION-RADIATION PAR UNE METHODE DE SINGULARITES	51
Introduction	51
2.1. - Position des problèmes hydrodynamiques au premier ordre pour un ensemble de corps	51
2.2. - Résolution du problème par une méthode de singularités - Fonctions de Green	55
2.2.1. - Détermination de la fonction de Green G_c en profondeur finie uniforme	58
2.2.2. - Détermination de la fonction de Green G_s en profondeur finie uniforme	66
2.2.3. - Fonctions de Green en profondeur infinie	67
2.2.4. - Comportement asymptotique des fonctions de Green en fonction de la période	69
2.3. - Etablissement des équations intégrales, potentiels, vitesses, notation complexe, fréquences irrégulières	71
2.4. - Comportement à l'infini des fonctions de Green et des potentiels	76
2.4.1. - Comportement à l'infini d'une fonction de Green	76
2.4.2. - Potentiel induit à l'infini par une distribution de singularités, fonction de Kochin	79
2.5. - Vérification de la validité de la solution trouvée	81
2.6. - Les problèmes de radiation	81
2.6.1. - Décomposition en problèmes élémentaires	81
2.6.2. - Equations intégrales	84
2.6.3. - Masses d'eau ajoutées, amortissements	85
2.6.4. - Propriétés des masses d'eau ajoutées et des amortissements .	88
2.7. - Le problème de diffraction	92
2.7.1. - Position du problème	92
2.7.2. - Equations intégrales	93
2.7.3. - Efforts d'excitation	94
2.7.4. - Formules d'Haskind	95
2.8. - Les équations du mouvement	98
2.8.1. - Mouvements d'un ensemble de corps	98
2.8.2. - Raideurs et amortissements entre corps	100
2.8.3. - Efforts de liaisons entre sous-ensembles	100
2.8.4. - Comportement asymptotique	101
2.8.5. - Conclusion	102
2.9. - Efforts de dérive	102
2.9.1. - Introduction	102
2.9.2. - Formulation des efforts de dérive par intégration des pressions	102
2.9.3. - Formules de Maruo-Newman	106
2.9.4. - Conclusion	120

Chapitre 3 : RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DISCRETISE	121
Introduction	121
3.1. - Choix d'une méthode de résolution du problème discrétisé	121
3.2. - Calcul des coefficients d'influence discrétisés	124
3.2.1. - Principe de calcul des coefficients d'influence	124
3.2.2. - Coefficients d'influence du potentiel de sources en profondeur infinie	125
3.2.3. - Coefficients d'influence du potentiel de doublets normaux en profondeur infinie	128
3.2.4. - Coefficients d'influence des vitesses normales de sources en profondeur infinie	130
3.2.5. - Utilisation du lissage par exponentielles pour le calcul de la fonction de Green en profondeur finie	133
3.2.6. - Coefficients d'influence du potentiel de sources en profondeur finie	140
3.2.7. - Coefficients d'influence du potentiel de doublets normaux en profondeur finie	146
3.2.8. - Coefficients d'influence des vitesses normales de sources en profondeur finie	148
3.2.9. - Intégration numérique des coefficients d'influence	152
3.2.10. - Symétries des coefficients d'influence	154
3.3. - Résolution des problèmes de radiation et de diffraction	154
3.3.1. - Constitution des systèmes linéaires	154
3.3.2. - Les problèmes de radiation	155
3.3.3. - Le problème de diffraction	158
3.3.4. - Méthodes de résolution des systèmes linéaires	161
3.4. - Equations du mouvement	163
3.4.1. - Caractéristiques hydrostatiques d'un flotteur discrétisé	163
3.4.2. - Calcul des mouvements	166
3.4.3. - Calcul des pressions hydrodynamiques	166
3.5. - Calcul des efforts de dérive par la formulation de Maruo-Newman ..	167
3.6. - Calcul des efforts de dérive par intégration des pressions	172
3.7. - Calcul de la cinématique dans le fluide	179
3.8. - Organisation du code AQUADYN	179
3.8.1. - Généralités sur les programmes de calcul	179
3.8.2. - Dénomination des programmes de calcul et description sommaire	180
3.8.3. - Organigramme de fonctionnement	182
3.8.4. - Temps de calcul	183

Chapitre 4 : RESULTATS NUMERIQUES	185
Introduction	185
4.1. - Influence de la discrétisation, le caisson D.N.V.	185
4.1.1. - Description du test	185
4.1.2. - Résultats	188
4.1.3. - Analyse des résultats	195
4.2. - Diffraction de la houle par un pieu cylindrique en profondeur finie ..	196
4.2.1. - Résultats analytiques	196
4.2.2. - Résultats numériques	197
4.2.3. - Analyse des résultats	199
4.3. - Efforts de dérive sur une demi-sphère	199
4.3.1. - Description du test	199
4.3.2. - Résultats	200
4.3.3. - Analyse des résultats	201
4.4. - Efforts de dérive sur un ensemble de corps	202
4.4.1. - Description du test	202
4.4.2. - Résultats	203
4.4.3. - Analyse des résultats	205
4.5. - Efforts de dérive sur une barge en profondeur finie	205
4.5.1. - Description du test	205
4.5.2. - Résultats	207
4.5.3. - Analyse des résultats	208
4.6. - Vérification des propriétés théoriques	208
4.6.1. - Symétrie des coefficients hydrodynamiques	208
4.6.2. - Comparaison des formulations des efforts de diffraction	210
4.7. - Etude locale des équations de la mécanique	214
4.8. - Le problème des fréquences irrégulières	216
4.8.1. - Solutions théoriques du problème	216
4.8.2. - Mise en évidence numérique pour une distribution mixte de Green	218
4.8.3. - Elimination des fréquences irrégulières pour une distribution mixte de Green	220
4.8.4. - Comparaison avec la distribution de sources	222
4.8.5. - Conclusion	223
4.9. - Suggestions, perspectives	224
4.9.1. - Comparaison avec d'autres programmes	224
4.9.2. - Développements futurs	224

2ème Partie : RESISTANCE DE VAGUES	227
Introduction	229
Notes bibliographiques	231
Chapitre 5 : RESOLUTION DU PROBLEME DE NEUMANN-KELVIN PAR UNE METHODE DE SINGULARITES DE KELVIN	235
Introduction	235
5.1. - Position du problème	235
5.1.1. - Definition du problème de Neumann-Kelvin	235
5.1.2. - Formulation mathématique du problème	238
5.1.3. - Choix d'une méthode de résolution	240
5.2. - Equations intégrales	240
5.2.1. - Carène entièrement immergée	240
5.2.2. - Carène coupant la surface libre	241
5.3. - Fonction de Green	244
5.4. - Comportement à l'infini	247
5.4.1. - Comportement à l'infini de la fonction de Green	247
5.4.2. - Potentiel induit à l'infini arrière par une distribution de singularités	249
5.4.3. - Hauteur de vagues à l'infini arrière	251
5.4.4. - Comportement des vitesses à l'infini	251
5.5. - Calcul des efforts sur la carène	253
5.5.1. - Calcul de la résistance de vagues par application du théorème des quantités de mouvement	253
5.5.2. - Calcul des efforts par intégration des pressions	255
5.5.3. - Comparaison des deux méthodes	258
5.6. - Approximations du problème de Neumann-Kelvin	258
5.6.1. - Hypothèse du nombre de Froude infini	259
5.6.2. - Hypothèse du nombre de Froude nul	259
5.6.3. - Hypothèse du bateau mince	260
5.7. - Résolution numérique du problème discrétisé	261
5.7.1. - Equations intégrales discrétisées	261
5.7.2. - Coefficients d'influence	262
5.7.3. - Intégration numérique des coefficients d'influence	266
5.7.4. - Méthode de résolution du système linéaire	267
5.7.5. - Calcul de la résistance de vagues	267
5.7.6. - Symétrie	269
5.8. - Résultats numériques	270
5.8.1. - Ellipsoïde immergé	270
5.8.2. - Carène de Wigley	273
5.9. - Conclusion	278

Chapitre 6 : RESOLUTION DU PROBLEME DE LA RESISTANCE DE VAGUES PAR UNE METHODE DE SINGULARITES DE RANKINE	281
Introduction	281
6.1. - Position du problème	282
6.1.1. - Ligne de courant	283
6.1.2. - Condition de pression	283
6.1.3. - Condition cinématique	283
6.1.4. - Conditions de surface libre exactes	284
6.2. - Conditions de surface libre approchées	285
6.2.1. - Hypothèse de Nakatake	287
6.2.2. - Hypothèse de Dawson	287
6.2.3. - Problème de Neumann-Kelvin	288
6.3. - Equations intégrales	289
6.3.1. - Le problème aux limites	289
6.3.2. - Etablissement des équations intégrales	289
6.3.3. - Schéma de différences finies	291
6.4. - Calcul des efforts	291
6.4.1. - Calcul des efforts au premier ordre	292
6.4.2. - Déplacements	292
6.4.3. - Calcul des efforts au second ordre	294
6.5. - Résolution numérique du problème discrétisé	295
6.5.1. - Principe de la méthode de résolution	295
6.5.2. - Discrétisation de la carène	295
6.5.3. - Coefficients d'influence	295
6.5.4. - Résolution du problème du double modèle	297
6.5.5. - Lignes de courant du double modèle, maillage de la surface libre	298
6.5.6. - Résolution du problème avec surface libre	299
6.5.7. - Calcul des efforts	304
6.6. - Organisation du code REVA	304
6.6.1. - Généralités	304
6.6.2. - Liste des principaux modules et utilisation	305
6.6.3. - Organigramme de fonctionnement	306
6.6.4. - Parallélisation du code	307
6.6.5. - Temps de calcul	307
6.7. - Résultats numériques	308
6.7.1. - Tests des schémas de différences finies	308
6.7.2. - Ellipsoïde immergé	313
6.7.3. - Carène de Wigley	320
6.7.4. - Comparaison avec d'autres méthodes de singularités de Rankine	327
6.8. - Conclusion	329
Conclusion Générale	331

Annexe 1 : EQUATIONS GENERALES	333
I - Notations	333
II - Hypothèses concernant les problèmes d'hydrodynamique	334
III - Equations générales	335
IV - Conditions aux limites	336
V - Similitude	338
Annexe 2 : PRINCIPE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME A SURFACE LIBRE PAR UNE METHODE DE SINGULARITES	339
I - Notations	339
II - Position du problème - Méthode de résolution	340
III - Représentation d'un champ scalaire harmonique par une distribution de singularités	340
IV - Equivalence cinématique entre un solide en mouvement dans un fluide illimité et une distribution de singularités	346
V - Distribution de singularités cinématiquement équivalente au problème avec surface libre pour une carène immergée	350
VI - Modifications des résultats pour des carènes coupant la surface libre	353
VII - Identités remarquables	354
VIII - Transformée de Fourier d'une fonction de deux variables	355
IX - Solution générale d'un problème de Dirichlet dans le domaine $-h < z < 0$	357
X - Méthode générale de détermination de la fonction de Green	360
Annexe 3 : CALCUL D'INTEGRALES DU TYPE $I(K_0, Z) = \int_0^\infty \frac{e^{-kZ}}{k - K_0} dk, \text{Re}(Z) > 0$	367
I - Fonction exponentielle intégrale d'ordre 1	367
II - Formulaire de calcul des intégrales $I(\zeta)$	369
III - Fonction $J(Z)$	370
Annexe 4 : RAPPEL DES RESULTATS DE LA METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE	371
Annexe 5 : DISCRETISATION D'UN PROBLEME INTEGRAL	373
I - Discrétisation d'une équation intégrale	373
II - Découpage d'une carène	374
III - Caractéristiques géométriques d'une facette	376
Annexe 6 : INTEGRALES DE SURFACE SUR UNE FACETTE PLANE	381
I - Calcul de $S^0 = \iint_S \frac{1}{MM'} dS(M')$	381
II - Calcul de $V_{S \frac{x}{z}}^0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_S \frac{1}{MM'} dS(M')$	382
III - Calcul de $D^0 = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M')$	383
IV - Calcul de $V_{d \frac{x}{z}}^0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M')$	384
V - Calcul d'intégrales du type $I = \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M')$	385
VI - Calcul d'intégrales du type $J = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} G(\xi) dS(M')$	388
Annexe 7 : SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES DECENTRE AMONT	391
Annexe 8 : PARALLELISATION DU CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE	393
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	397

INTRODUCTION GENERALE :

Le but initial de ce mémoire était de décrire les travaux, réalisés depuis plus de dix ans au Laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, ayant abouti à la réalisation de codes de calcul utilisables pour des besoins industriels.

Au cours de la rédaction, il nous a paru utile de rassembler en un document les différents développements mathématiques et numériques nécessaires pour aborder la théorie et la résolution des problèmes d'hydrodynamique par la méthode des singularités, aussi nous n'avons pas hésité à rappeler les résultats classiques utiles pour la résolution des problèmes posés.

Les deux problèmes traités sont les problèmes, maintenant devenus classiques, de la diffraction-radiation et de la résistance de vagues. La formulation mathématique sera entreprise en utilisant le modèle du fluide parfait isovolume, avec linéarisation totale ou partielle des conditions aux limites.

Dans la première partie, nous traiterons du problème de diffraction-radiation. Après un rappel bibliographique des principales étapes de la résolution du problème, nous poserons, dans le premier chapitre, les problèmes mécaniques jusqu'au second ordre en utilisant un développement en série de perturbations. Dans le deuxième chapitre, nous exposerons la théorie de la résolution du problème hydrodynamique au premier ordre par une méthode de singularités, avec exploitation de la solution au second ordre. Le troisième chapitre sera consacré à la résolution numérique du problème discrétisé et nous décrirons les algorithmes ayant conduit à la réalisation du code de calcul AQUADYN. Dans le quatrième chapitre, nous montrerons quelques résultats significatifs obtenus avec ce code.

La deuxième partie traite du problème de la résistance de vagues. Après une analyse bibliographique, nous rappellerons, dans le cinquième chapitre, les résultats obtenus en résolvant le problème de Neumann-Kelvin par une méthode de singularités de Kelvin, ainsi que les problèmes théoriques et numériques apparaissant pour des carènes coupant la surface libre. Dans le sixième chapitre, nous décrirons la méthode des singularités de Rankine, due à C.W.Dawson, qui permet de s'affranchir des problèmes précédents. Nous détaillerons enfin les algorithmes nécessaires à la mise en oeuvre d'un code de calcul fondé sur cette méthode et nous comparerons les résultats aux expériences.

Les travaux réalisés en diffraction-radiation ont été entrepris en 1975 à l'initiative et sous la direction du Professeur P.Guével. Les résultats présentés sont issus d'un travail d'équipe exemplaire réalisé entre 1975 et 1982 en collaboration avec P.Guével et J.C.Daubisse et dont l'aboutissement a été la réalisation du code de calcul AQUADYN qui est actuellement utilisé par plus d'une dizaine d'entreprises ou d'organismes travaillant dans le domaine du Génie Océanique. Certains développements significatifs ont été réalisés dans le cadre de Diplômes d'Etudes Approfondies par P.Lemesle, F.Monin et M.Le Boulluec. La mise en oeuvre de la méthode des singularités de Rankine a été entreprise à partir de septembre 1984 dans le cadre du Diplôme d'Etudes Approfondies de J.J.Maisonneuve, les développements ultérieurs étant réalisés en collaboration.

1ERE PARTIE
DIFFRACTION - RADIATION

INTRODUCTION :

L'étude de la tenue à la mer des structures sollicitées par la houle est un des problèmes fondamentaux de l'hydrodynamique dont la résolution est devenue une nécessité économique pour le dimensionnement et la sécurité des installations permanentes, de plus en plus complexes, destinées à la recherche du pétrole en mer profonde.

Le problème traité est celui de la réponse d'un ensemble de structures de positions moyennes fixes, sollicitées par une houle cylindrique. Le modèle de fluide utilisé est celui du fluide parfait, isovolume, l'écoulement est irrotationnel, ce qui entraîne l'existence d'un potentiel des vitesses. Le domaine fluide s'étend jusqu'à l'infini dans la plan horizontal, la profondeur est infinie ou limitée par un fond horizontal.

Le problème ainsi posé se décompose en un problème de mécanique qui est celui de la description du mouvement d'un corps flottant et un problème d'hydrodynamique dont la solution permet la détermination des efforts exercés par le fluide sur le système.

Après une analyse bibliographique rappelant les principales étapes de l'étude du problème, nous poserons, dans le premier chapitre, les problèmes mécaniques et hydrodynamiques jusqu'au second ordre inclus.

Dans le second chapitre, nous traiterons de la résolution des problèmes hydrodynamiques au premier ordre par une méthode de singularités. Ces problèmes se décomposent en un problème de diffraction, correspondant aux efforts exercés par une houle cylindrique harmonique du premier ordre sur des corps fixes, et des problèmes de radiation où l'on détermine les efforts exercés sur les corps du système lorsqu'on impose un mouvement forcé sinusoïdal à l'un d'entre eux, en eau initialement calme. Une fois résolus ces problèmes, les équations de la mécanique permettent de calculer les mouvements du système, ainsi que les efforts de liaison ou d'ancrage. Il est alors possible de calculer les efforts constants du second ordre, appelés efforts de dérive, puisqu'ils correspondent, en l'absence de forces de rappel, à un déplacement de chaque corps du système.

Dans le troisième chapitre, nous expliquons les choix qui doivent être effectués à chaque étape de la résolution numérique du problème, choix de la distribution de singularités, choix des méthodes de résolution. Les formules nécessaires à la résolution complète du problème sont explicitées. Nous décrivons enfin l'organisation du code de calcul AQUADYN issu de la formulation précédemment décrite.

Dans le quatrième chapitre, nous montrons quelques résultats numériques significatifs obtenus avec ce code. Dans un premier temps, nous étudions la convergence de la méthode en fonction de la discrétisation, puis nous comparons les résultats obtenus à des formulations analytiques. L'étude des efforts de dérive sur un système composé de plusieurs corps et sur une barge montre les possibilités et les limites de ce programme. Nous vérifions ensuite numériquement certaines propriétés théoriques, puis nous étudions le problème des fréquences irrégulières en les mettant en évidence théoriquement et numériquement, puis en les supprimant. Nous proposons enfin des perspectives d'amélioration des performances de ce type de programme.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES :

Le problème de la diffraction-radiation de la houle par des corps de positions moyennes fixes a été étudié théoriquement depuis de nombreuses années. Cependant, la complexité de la formulation du problème tridimensionnel complet pour des corps quelconques fait que les premiers résultats n'ont été obtenus que vers la fin des années 60, lorsque les progrès des calculateurs ont rendu la résolution possible. Nous allons rappeler brièvement les principales étapes de la résolution du problème, ainsi que les contributions essentielles.

Les premières solutions analytiques, dans des cas particuliers, pour des corps fixes soumis à l'action de la houle ont été obtenues en 1940 par T.H Havelock [65]. Le problème tridimensionnel complet pour un corps flottant a été formulé par F. John en 1950 [73] .

En 1960, J.V. Wehausen et E. Laitone [111] récapitulèrent toutes les études antérieures effectuées sur le sujet et proposèrent des formulations de la fonction de Green du problème tridimensionnel en profondeur infinie et en profondeur finie uniforme sous la forme d'une série ou de la valeur principale de Cauchy d'une intégrale. Cette publication reste actuellement un ouvrage de base pour l'étude de tous les problèmes d'hydrodynamique à surface libre.

Une première approche du problème tridimensionnel à partir des résultats bidimensionnels (théorie des tranches) a été décrite par B.V. Korvin-Kroukowsky en 1961 [76] . Le premier programme résolvant le vrai problème tridimensionnel par une méthode de singularités a été réalisé par J.C. Lebreton et A. Margnac au Laboratoire National d'Hydraulique de l'E.D.F. en 1968 [81] . Des programmes similaires ont été conçus au cours des années 74 à 76 dans différents organismes, en Norvège au D.N.V. (Det Norske Veritas), aux Pays-Bas au N.S.M.B. (Netherlands Ship Model Basin), en Grande-Bretagne au N.M.I. (National Maritime Institute). Ils utilisent tous des singularités de type sources. Depuis 1975, à l'initiative du Professeur P. Guével, le Laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'E.N.S.M. a développé un programme de calcul utilisant des singularités mixtes de type sources et doublets normaux dont la description fait l'objet des chapitres suivants. Des codes de calcul utilisant la méthode des éléments finis en tridimensionnel ont été réalisés aux Etats-Unis par C.C. Mei au M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) [88] et en France à l'I.F.P. (Institut Français du Pétrole) et à Franlab Marine [11] .

La comparaison de ces codes a eu lieu dans le cadre d'un colloque organisé par l'A.R.A.E. (Association de Recherche Action des Eléments) et l'I.F.P. en 1977 [107] .

Un code de calcul fondé sur la méthode des éléments finis localisés a été développé par le Groupe Hydrodynamique Navale de l'E.N.S.T.A. (Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées) en 1980 [30] .

La fin des années 1970 et le début des années 80 ont vu l'introduction dans les codes de calcul des efforts de dérive mis en évidence expérimentalement par Y. Watanabe [110] en 1938 et dont une première formulation approchée a été fournie par T.H. Havelock [66] en 1942 . Une étude bibliographique des différentes méthodes de calcul des efforts de dérive a été réalisée par A. Clément [12] au Laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'E.N.S.M. dans le but d'étudier les formulations les mieux adaptées au calcul numérique .

Nous résumons ici les points principaux de cette étude.

La première formulation analytique exacte des efforts horizontaux, obtenue par application du théorème des quantités de mouvement, a été donnée par H.Maruo [87] en 1960, elle a été complétée par J.N.Newman [92] en 1967 qui a ajouté l'expression du moment de lacet. La formulation complète de l'ensemble des efforts de dérive par intégration des pressions a été réalisée par V.Ankudinov en 1969 [2], les résultats numériques présentés étant issus de la théorie des tranches. L.Faltinsen et F.Michelsen ont calculé les efforts de dérive en tridimensionnel en 1974 [34] en utilisant une forme modifiée des formules de Maruo-Newman. En 1977, J.A.Pinkster et G.Van Oortmerssen [98] calculèrent le torseur complet des efforts de dérive en intégrant les pressions au second ordre sur la carène, tandis que K.Kudou [78] proposa des formulations analytiques permettant de tester les programmes de calcul. Depuis cette date, les diverses formulations des efforts de dérive ont été introduites dans la plupart des programmes de diffraction-radiation, souvent par les deux formulations (Maruo-Newman et intégration des pressions).

Une synthèse des différents problèmes de mécanique actuellement posés par la tenue à la mer a été réalisée par D.Euvrard en 1981 [32] à l'occasion du 5ème Congrès Français de l'Association Universitaire de Mécanique.

Pour faire le bilan des améliorations apportées progressivement aux codes de calcul, des tests internationaux permettant de comparer les résultats des différents codes ont été organisés par l'I.T.T.C. (International Towing Tank Conference) en 1984 [108] sur le thème du calcul des mouvements d'une plate-forme semi-submersible et par l'I.S.S.C. (International Ship and Offshore Structures Congress) en 1985 [28] sur la détermination des mouvements et des efforts de dérive pour une plate-forme à lignes tendues.

Les codes de calcul résolvant le problème de la diffraction-radiation au premier ordre font encore l'objet de recherches visant surtout à améliorer la vitesse et la précision des calculs.

Chapitre 1 : LES EQUATIONS DE LA MECANIQUE APPLIQUEES AU PROBLEME DE LA DIFFRACTION-RADIATION AU POINT FIXE

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons traiter la mécanique du problème de diffraction-radiation d'un corps flottant, oscillant autour d'un point fixe, en développant les termes suivant les puissances croissantes d'un petit paramètre. Cette technique nous permettra de définir les grandeurs intervenant dans la résolution du problème aux différents ordres. Nous commencerons par poser le problème complet au premier et au second ordre à partir des équations générales régissant les écoulements en fluide parfait isovolume. Nous décrirons ensuite le mouvement d'un corps solide, puis nous établirons les expressions donnant les efforts exercés par le fluide sur une carène en mouvement. Nous pourrons alors faire le bilan de tous les efforts en distinguant les termes de pesanteur, les termes hydrostatiques et les termes hydrodynamiques. Les équations de la mécanique seront complétées par la détermination des termes inertiels correspondants aux mouvements du corps. Seuls restent inconnus les termes hydrodynamiques dont la détermination fera l'objet des chapitres suivants.

1.1. FORMULATION DU PROBLEME AU PREMIER ET AU SECOND ORDRE :

Le problème posé est celui du mouvement d'un corps sollicité par une houle incidente en présence d'un fond horizontal.

Les hypothèses concernant le comportement du fluide et le champ de forces extérieures sont celles du fluide parfait isovolume soumis au champ de la pesanteur.

La houle incidente est la houle de Stokes.

Les équations générales traduisant ces hypothèses sont décrites dans l'annexe 1.

- Notations :

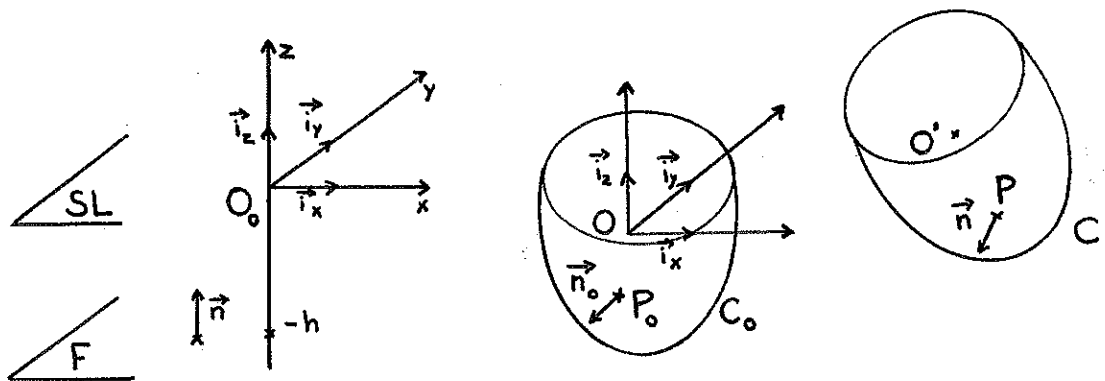


Figure 1.1

- Description de la géométrie du système :

D	:	domaine fluide
SL	:	surface libre
F	:	fond horizontal situé à la profondeur h
O_0	:	point de la surface libre origine d'un repère absolu direct, Oz étant la verticale ascendante
O	:	origine d'un repère fixe parallèle au repère absolu déduit du précédent par une translation $\overrightarrow{O_0O}$
O'	:	position occupée par le point O considéré comme lié au corps au cours du mouvement
C_0	:	position de la carène au repos
P_0	:	point de la carène au repos
\vec{n}_0	:	normale extérieure à C_0 en P_0
C	:	position occupée par la carène au cours du mouvement
P	:	position occupée par P_0 au cours du mouvement
\vec{n}	:	normale en P à C

- Description de l'écoulement :

ϕ	:	potentiel absolu des vitesses
$\vec{V} = \text{grad } \phi$:	vitesse dans le domaine fluide
ϕ_I	:	potentiel de la houle incidente
ε'	:	viscosité évanescence des fluides presque parfaits
η	:	élévation de la surface libre
ζ	:	déformée de la surface libre

- Description des paramètres du développement en série de perturbations :

ε	:	petit paramètre du développement
$O(\varepsilon)$:	infinitement petit d'ordre ε
$o(\varepsilon)$:	infinitement petit d'ordre supérieur à ε

1.1.1. Equations du problème :

L'équation régissant l'écoulement est l'équation de continuité dans le domaine fluide. Les conditions aux limites sont les conditions de surface libre, de glissement sur la carène et sur le fond horizontal et la condition de radiation à l'infini qui est satisfaite par construction si l'on utilise les conditions de surface libre des fluides presque parfaits.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les conditions de surface libre définies par (A1.16) et (A1.17) en omettant, pour alléger l'écriture, de préciser $\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+}$. Les formules où figure ϵ' devront être comprises comme la limite lorsque ϵ' tend vers zéro par valeurs positives de l'expression. Ce terme ϵ' n'est utile que lors de l'établissement des formules des fonctions de Green, pour préciser la position des pôles du dénominateur dans le plan complexe, comme nous le verrons au deuxième chapitre, il pourra donc être omis dans certaines formules.

Le problème posé se traduit donc par :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } \Delta \phi = 0 & \text{dans } D \\ \text{b) } \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C = \left. \vec{V}_E \cdot \vec{n} \right|_C & \text{Continuité} \\ \text{c) } \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 & \text{Glissement sur le corps} \\ \text{d) } \phi \rightarrow \phi_I \text{ pour } \begin{array}{l} |x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty \end{array} & \text{Glissement sur le fond} \\ \text{e) } \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \text{grad } V^2 + 2\epsilon' \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\epsilon' V^2 \right|_{z=\zeta(x,y,t)} = F'(t) & \text{Radiation à l'infini} \\ \text{f) } \zeta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + 2\epsilon' \phi - F(t) \right] & \text{surface libre} \end{array} \right.$$

Le problème ainsi posé est non linéaire par rapport à la condition de glissement sur le corps et aux conditions de surface libre.

1.1.2. Développements suivant une méthode de perturbations régulières :

Pour résoudre ce problème, nous allons développer et classer les grandeurs caractéristiques suivant les différentes puissances d'un petit paramètre ϵ . Pour ce faire, nous supposons que la réponse du système est du même ordre de grandeur en ϵ que l'excitation, que le développement en série de puissances de ϵ ($1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n, \dots$) converge, et enfin que le petit paramètre ϵ est de l'ordre de grandeur de la déformée de la surface libre.

Un potentiel ϕ , défini à une constante $G(t)$ près, s'écrit alors :

$$(1.2) \quad \phi = \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + o(\epsilon^2) + G(t)$$

En développant $G(t)$ sous la forme :

$$(1.3) \quad G(t) = \epsilon G^{(1)}(t) + \epsilon^2 G^{(2)}(t)$$

Le potentiel du premier ordre sera égal à :

$$(1.4) \quad \phi_1 = \epsilon [\phi^{(1)} + G^{(1)}(t)]$$

et celui du second ordre :

$$(1.5) \quad \phi_2 = \epsilon^2 [\phi^{(2)} + G^{(2)}(t)]$$

Pour les vitesses, on a de même :

$$(1.6) \quad \vec{V} = \overline{\text{grad}} \phi = \epsilon \vec{V}^{(1)} + \epsilon^2 \vec{V}^{(2)} + o(\epsilon^2)$$

avec :

$$(1.7) \quad \vec{V}_1 = \epsilon \vec{V}^{(1)} \text{ et } \vec{V}_2 = \epsilon^2 \vec{V}^{(2)}$$

- Condition de surface libre :

L'élévation de surface libre ζ étant de l'ordre de grandeur de ϵ , un développement limité des termes de la condition de surface libre donne :

$$(1.8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0, t) + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x, y, 0, t) + o(\epsilon^2)$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, y, 0, t) + \zeta \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial z}(x, y, 0, t) + o(\epsilon^2)$$

$$(1.10) \quad \left. \frac{\partial V^2}{\partial t} + 2\epsilon' \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2\epsilon' V^2 \right|_{z=\zeta} = \left. 2\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right|_{z=0} + \left. 2\epsilon' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + 2\epsilon' \zeta \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \right|_{z=0} + \left. 2\epsilon' V^2 \right|_{z=0} + o(\epsilon^2)$$

$$(1.11) \quad \left. \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} V^2 \right|_{z=\zeta} = o(\epsilon^2)$$

Si l'on exprime par ailleurs ζ , d'après (1.1.f) par :

$$(1.12) \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + o(\epsilon)$$

La condition de surface libre développée au second ordre en ϵ , s'écrit à partir de (1.8), (1.9), (1.10) et (1.12) :

$$(1.13) \quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = -2 \overline{\text{grad}} \phi \cdot \overline{\text{grad}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} + o(\epsilon^2)$$

En identifiant les termes au premier et au second ordre, il vient :

- au premier ordre :

$$(1.14) \quad \left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + 2\epsilon' \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = E \phi_1 \Big|_{z=0} = 0$$

- au second ordre : E désignant l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon' \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial z}$

$$(1.15) \quad E \phi_2 \Big|_{z=0} = -2 \overline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \overline{\text{grad}} \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} (E \phi_1) \Big|_{z=0} - 2\epsilon' (\overline{\text{grad}} \phi_1)^2 \Big|_{z=0}$$

- Houle de Stokes :

On rappelle les résultats obtenus par cette approche pour la houle de Stokes de potentiel ϕ_I développé au premier et au second ordre :

$$(1.16) \quad \phi_I = \epsilon \phi_I^{(1)} + \epsilon^2 \phi_I^{(2)} + G_I(t) + o(\epsilon^2), \quad G_I(t) = \epsilon G^{(1)}(t) + \epsilon^2 G_I^{(2)}(t) + o(\epsilon^2)$$

$$(1.17) \quad \phi_{I_1} = \epsilon [\phi_I^{(1)} + G_I^{(1)}(t)], \quad \phi_{I_2} = \epsilon^2 [\phi_I^{(2)} + G_I^{(2)}(t)]$$

ϕ_{I_1} vérifiant les équations (1.1.a), (1.1.c) et (1.14)

ϕ_{I_2} vérifiant les équations (1.1.a), (1.1.c) et (1.15)

En résolvant ce problème par la méthode de séparation des variables, on obtient comme solution :

- au premier ordre :

$$(1.18) \quad \phi_{I_1} = -\frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} \cos [m_0 X - \omega t]$$

m_0 étant solution de :

$$(1.19) \quad g m_0 \text{th } m_0 h = \omega^2$$

- au second ordre :

$$(1.20) \quad \phi_{I_2} = -\frac{3 m_0 a^2 g}{8 \omega} \frac{\text{ch } 2 m_0(z+h)}{\text{sh}^3 m_0 h \text{ch } m_0 h} \sin 2 [m_0 X - \omega t]$$

OX étant l'axe de propagation de la houle et ω la pulsation de la houle incidente.

Une fois connus les potentiels au premier et au second ordre, on en déduit les hauteurs de vagues η à partir de (1.4), (1.5) et (1.1.f) par :

$$(1.21) \quad \eta = \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + o(\epsilon^2) + \frac{1}{g} F_I(t)$$

avec :

$$F_I(t) = -\frac{d}{dt} G_I(t)$$

Ce calcul fait intervenir d'après (A1.17) la constante $F_I(t)$ de l'équation de Lagrange. On développe donc celle-ci suivant les puissances croissantes de ϵ :

$$(1.22) \quad F_I(t) = \epsilon F_I^{(1)}(t) + \epsilon^2 F_I^{(2)}(t) + o(\epsilon^2)$$

La condition de conservation du niveau moyen de la surface libre au repos impose :

$$(1.23) \quad \int_0^\lambda \eta(x) dx = 0$$

λ étant la longueur d'onde de la houle.

On en déduit :

$$(1.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{I_1} = \epsilon F_I^{(1)} = 0 \\ F_{I_2} = \epsilon^2 F_I^{(2)} = \frac{1}{4} m_0 a^2 g \frac{1}{\operatorname{sh} m_0 h \operatorname{ch} m_0 h} \end{array} \right.$$

En posant :

$$\eta_1 = \epsilon \eta^{(1)} \text{ et } \eta_2 = \epsilon^2 \left[\eta^{(2)} + \frac{1}{g} F_I^{(2)} \right]$$

F_{I_2} intervient comme une correction du niveau moyen du fluide.

Après développement des pressions au second ordre suivant (A1.15), on en déduit les hauteurs de vagues au premier et au second ordre :

$$(1.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = a \sin (m_0 X - \omega t) \\ \eta_2 = - \frac{a^2 m_0}{4 \operatorname{sh} m_0 h \operatorname{ch} m_0 h} \left(2 \operatorname{ch}^2 m_0 h + \frac{3}{\operatorname{th}^2 m_0 h} \right) \cos 2 (m_0 X - \omega t) \end{array} \right.$$

Ces expressions tiennent compte de la constante F_{I_2} qui est comprise dans la hauteur de vagues au second ordre.

On peut remarquer que lorsque la profondeur tend vers l'infini, la constante de Lagrange F_{I_2} et le potentiel du second ordre ϕ_{I_2} tendent vers zéro. En profondeur infinie, le potentiel du premier ordre permettra d'évaluer les grandeurs au moins jusqu'au second ordre. Par ailleurs, dans le cas de la houle de Stokes, le petit paramètre ϵ apparaît comme étant proportionnel à l'amplitude de la houle du premier ordre a .

En profondeur finie, la houle correspond à une onde de vitesse $C = \omega / m_0$ se propageant dans la direction des X positifs. Les termes du second ordre n'interviennent que comme une modification de la forme de l'onde, la vitesse de propagation étant identique à celle du premier ordre.

Dans le cas où la houle est exprimée dans un repère (O,x,y,z) , si β est l'angle (Ox,OX) , on doit remplacer X par $(x \cos \beta + y \sin \beta)$.

- Développement du potentiel ϕ :

On peut développer le potentiel ϕ solution du problème (1.1) :

$$(1.26) \quad \phi = \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + o(\epsilon^2) + G(t)$$

$G(t)$ étant une fonction inconnue du temps indépendante des variables d'espace.

La condition de radiation à l'infini impose $G(t) = G_I(t)$ puisque ϕ tend vers ϕ_I à l'infini.

On en déduit la constante de l'équation de Lagrange :

$$(1.27) \quad F(t) = \epsilon^2 F^{(2)}(t) = F_2 = \frac{1}{4} m_0 a^2 g \frac{1}{\text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h}$$

Au second ordre, F_2 est une constante, donc $F_2'(t) = 0$.

Les potentiels au premier et au second ordre s'écrivent :

$$(1.28) \quad \phi_1 = \epsilon \phi^{(1)}, \quad \phi_2 = \epsilon^2 \phi^{(2)} - \int F_2 dt = \epsilon^2 \phi^{(2)} - (t-t_0) F_2$$

et pour $\vec{V} = \text{grad } \phi$:

$$(1.29) \quad \vec{v} = \epsilon \vec{v}^{(1)} + \epsilon^2 \vec{v}^{(2)} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + o(\epsilon^2)$$

avec

$$\vec{v}_1 = \epsilon \vec{v}^{(1)} \text{ et } \vec{v}_2 = \epsilon^2 \vec{v}^{(2)}$$

- Condition de glissement :

Le même type de traitement peut être effectué pour la condition de glissement. Soit P_0 la position d'un point de la carène au repos C_0 , \vec{n}_0 étant la normale à P_0 . Au cours du mouvement, ce point occupe une position P , avec une normale \vec{n} . L'hypothèse des réponses du même ordre de grandeur que les excitations entraîne que :

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \vec{P}_0 P &= \epsilon \vec{P}_0 P^{(1)} + \epsilon^2 \vec{P}_0 P^{(2)} + o(\epsilon^2) \\ \vec{n} &= \vec{n}_0 + \epsilon \vec{n}^{(1)} + o(\epsilon) \end{aligned}$$

$\vec{n}_1 = \epsilon \vec{n}^{(1)}$ étant la rotation de la normale par rapport à sa position au repos, comme nous l'établirons au paragraphe suivant. On peut remarquer que cette hypothèse implique que l'on pose le problème en dehors des résonances mécaniques où la réponse est d'un ordre inférieur à l'excitation.

De même, le développement limité de la position d'un point de la carène C par rapport à sa position au repos C_0 donne :

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C &= \vec{n} \cdot \text{grad } \phi \Big|_C \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C &= (\vec{n}_0 + \epsilon \vec{n}^{(1)}) \cdot \text{grad } (\epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)}) \Big|_{C_0} + \epsilon^2 \vec{P}_0 P^{(1)} \cdot \text{grad } \left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n_0} \right|_C + o(\epsilon^2) \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C &= \epsilon \left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n_0} \right|_{C_0} + \epsilon^2 \left[\left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n_0} \right|_{C_0} + \left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n^{(1)}} \right|_{C_0} + \vec{P}_0 P^{(1)} \cdot \text{grad } \left. \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n_0} \right|_{C_0} \right] + o(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Les termes $\vec{V}_E \cdot \vec{n} \Big|_C$ se développant en :

$$(1.32) \quad \vec{V}_E \cdot \vec{n} \Big|_C = \epsilon \vec{V}_E^{(1)} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} + \epsilon^2 [\vec{V}_E^{(2)} \cdot \vec{n}_0 + \vec{V}_E^{(1)} \cdot \vec{n}^{(1)}] \Big|_{C_0} + o(\epsilon^2)$$

Par identification, on obtient les conditions de glissement :

$$(1.33) \quad \left. \begin{array}{l} \text{- au premier ordre :} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n_0} \Big|_{C_0} = \vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} \\ \text{- au second ordre :} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n_0} \Big|_{C_0} = \vec{V}_{E_2} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} + \vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_1 \Big|_{C_0} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} \Big|_{C_0} - P_0 P_1 \cdot \text{grad} (\vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_0) \Big|_{C_0} \end{array} \right\}$$

- Position des problèmes hydrodynamiques :

Les autres conditions du problème étant linéaires, on peut poser les problèmes au premier ordre et au second ordre suivants :

- au premier ordre :

$$(1.34) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Continuité} \\ \Delta \phi_1 = 0 \quad \text{dans D} \\ \text{Glissement sur le corps} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_{C_0} = \vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} \\ \text{Glissement sur le fond} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ \text{Radiation} \\ \phi_1 \sim \phi_{I_1} \\ \text{Condition de surface libre} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + 2 \epsilon' \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = E \quad \phi_1 \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right\}$$

- au second ordre :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Continuité} \\ \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{dans D} \\ \text{Glissement sur le corps} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial n_0} \Big|_{C_0} = \vec{V}_{E_2} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} + \vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_1 \Big|_{C_0} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n_1} \Big|_{C_0} - P_0 P_1 \cdot \text{grad} \vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_0 \Big|_{C_0} \end{array} \right\}$$

(1.35) Glissement sur le fond

$$\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

Radiation

$$\phi_2 \sim \phi_{I_2}$$

Condition de surface libre

$$\left. E \phi_2 \right|_{z=0} = -2 \operatorname{grad} \phi_1 \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} (E \phi_1) \Big|_{z=0} - 2\epsilon' (\operatorname{grad} \phi_1)^2 \Big|_{z=0}$$

Le potentiel total sera défini par :

- au premier ordre :

$$\phi = \phi_1 + o(\epsilon)$$

- au second ordre :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + o(\epsilon^2)$$

On peut remarquer que dans ces problèmes, ϵ n'intervient pas explicitement, son rôle n'étant que de classer les grandeurs suivant leur ordre respectif. Compte tenu des notations utilisées, l'ordre des expressions est égal à la somme des indices inférieurs ($\vec{V}_{E_1} \cdot \vec{n}_1$ est un terme du second ordre ainsi que $\vec{V}_{E_2} \cdot \vec{n}_0$). Cette représentation sera employée systématiquement jusqu'à la fin de ce chapitre de façon à alléger l'écriture.

Le problème au second ordre fait intervenir la solution du problème au premier ordre. Il en est de même aux ordres supérieurs, le problème à l'ordre N nécessitant la connaissance des solutions de tous les problèmes aux ordres inférieurs.

1.2. DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE :

1.2.1. Déplacements d'un point :

Le champ de déplacement d'un corps solide C à partir d'une position de repos C_0 peut être décomposé en une translation $\vec{\tau}$ et une rotation R d'angle θ autour d'un vecteur unitaire \vec{q} .

Si l'on considère un repère lié au corps coïncidant au repos avec le repère fixe (O,x,y,z), celui-ci est transformé après déplacement en un repère (O',x',y',z'). La translation $\vec{\tau}$ transforme le point O en O' et la rotation fait passer de la base orthonormée $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ à la base $\vec{i}'_x, \vec{i}'_y, \vec{i}'_z$.

Pour un vecteur quelconque \vec{u} , nous utiliserons la représentation intrinsèque de la rotation donnée par M.Le Boulluec [82] qui transforme celui-ci en un vecteur $R(\vec{u})$ donné par :

$$(1.36) \quad R(\vec{u}) = \vec{u} + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \vec{\Theta} \wedge \vec{u} + \frac{1 - \cos \Theta}{\Theta^2} \vec{\Theta} \wedge (\vec{\Theta} \wedge \vec{u})$$

avec :

$$(1.37) \quad \vec{\Theta} = \Theta \vec{q} = \Theta_x \vec{i}_x + \Theta_y \vec{i}_y + \Theta_z \vec{i}_z$$

Sous forme matricielle, la rotation s'écrit alors :

$$(1.38) \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin \Theta}{\Theta} \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_z & \Theta_y \\ \Theta_z & 0 & -\Theta_x \\ -\Theta_y & \Theta_x & 0 \end{bmatrix} + \frac{1 - \cos \Theta}{\Theta^2} \begin{bmatrix} -(\Theta_y^2 + \Theta_z^2) & \Theta_x \Theta_y & \Theta_x \Theta_z \\ \Theta_x \Theta_y & -(\Theta_x^2 + \Theta_z^2) & \Theta_y \Theta_z \\ \Theta_x \Theta_z & \Theta_y \Theta_z & -(\Theta_x^2 + \Theta_y^2) \end{bmatrix}$$

- Développements au second ordre :

. Translation :

On peut développer la translation au second ordre comme dans le paragraphe précédent :

$$(1.39) \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + o(\epsilon^2)$$

avec :

$$(1.40) \quad \vec{\tau} = \tau_x \vec{i}_x + \tau_y \vec{i}_y + \tau_z \vec{i}_z$$

et :

$$(1.41) \quad \vec{\tau}_1 = \begin{bmatrix} \tau_{x_1} \\ \tau_{y_1} \\ \tau_{z_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\tau}_2 = \begin{bmatrix} \tau_{x_2} \\ \tau_{y_2} \\ \tau_{z_2} \end{bmatrix}$$

. Rotation :

Pour la rotation, on suppose que :

$$(1.42) \quad \vec{\Theta} = \vec{\Theta}_1 + \vec{\Theta}_2 + o(\epsilon^2)$$

En reportant dans l'expression vectorielle de la rotation, on a, au second ordre près :

$$(1.43) \quad R(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{u} + [\vec{\Theta}_2 \wedge \vec{u} + 1/2 \vec{\Theta}_1 \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{u})] + o(\epsilon^2)$$

Ceci permet de décomposer R en :

$$(1.44) \quad R = I + R_1 + R_2 + o(\epsilon^2)$$

avec :

$$R_1(\vec{u}) = \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{u}$$

$$R_2(\vec{u}) = \vec{\Theta}_2 \wedge \vec{u} + 1/2 \vec{\Theta}_1 \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{u})$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$(1.43) \quad \left. \begin{array}{l} R_0 = I \text{ transformation identique} \\ R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_{z_1} & \Theta_{y_1} \\ \Theta_{z_1} & 0 & -\Theta_{x_1} \\ -\Theta_{y_1} & \Theta_{x_1} & 0 \end{bmatrix} \\ R_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(\Theta_{y_1}^2 + \Theta_{z_1}^2) & \Theta_{x_1} \cdot \Theta_{y_1} & \Theta_{x_1} \cdot \Theta_{z_1} \\ \Theta_{x_1} \cdot \Theta_{y_1} & -(\Theta_{x_1}^2 + \Theta_{z_1}^2) & \Theta_{y_1} \cdot \Theta_{z_1} \\ \Theta_{x_1} \cdot \Theta_{z_1} & \Theta_{y_1} \cdot \Theta_{z_1} & -(\Theta_{x_1}^2 + \Theta_{y_1}^2) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_{z_2} & \Theta_{y_2} \\ \Theta_{z_2} & 0 & -\Theta_{x_2} \\ -\Theta_{y_2} & \Theta_{x_2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Cette représentation de la rotation présente l'avantage de définir sans ambiguïté la matrice rotation au second ordre.

- Propriétés de la rotation R :

La matrice traduisant la rotation étant une matrice de changement de base orthonormée est orthogonale, on a donc :

$$(1.46) \quad \det (R) = 1$$

En appliquant la formule (1.36) à deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} , M.Le Boulluec [82] démontre que :

$$(1.47) \quad R(\vec{a}) \wedge R(\vec{b}) = R(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

- Déplacements :

Soit P_0 la position initiale d'un point de la carène. Après déplacement, ce point occupe une position P et l'on a :

$$(1.48) \quad \vec{O}^*P = \vec{\tau} + R(\vec{O}^*P_0)$$

Soit aux différents ordres :

$$(1.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{O}^*P^{(0)} = \vec{O}^*P_0 \\ \vec{O}^*P_1 = \vec{\tau}_1 + R_1(\vec{O}^*P_0) \\ \vec{O}^*P_2 = \vec{\tau}_2 + R_2(\vec{O}^*P_0) \end{array} \right.$$

Les déplacements du point P par rapport à sa position initiale P_0 sont donc :

$$(1.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'ordre 0 :} \\ \vec{P}_0^*P^{(0)} = \vec{0} \\ \text{à l'ordre 1 :} \\ \vec{P}_0^*P_1 = \vec{\tau}_1 + R_1(\vec{O}^*P_0) \\ \text{à l'ordre 2 :} \\ \vec{P}_0^*P_2 = \vec{\tau}_2 + R_2(\vec{O}^*P_0) \end{array} \right.$$

1.2.2. Vitesses :

Posons : $\vec{\theta} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ et $\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

La vitesse d'un point P de la carène en mouvement est donnée dans le repère fixe par :

$$(1.51) \quad \vec{V}(P) = \dot{\vec{\tau}} + \vec{\theta} \wedge \vec{O}^*P$$

Soit :

$$(1.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{- à l'ordre 1 :} \\ \vec{V}_1(P) = \dot{\vec{\tau}}_1 + \vec{\theta}_1 \wedge \vec{O}^*P_0 \\ \text{- à l'ordre 2 :} \\ \vec{V}_2(P) = \dot{\vec{\tau}}_2 + \vec{\theta}_2 \wedge \vec{O}^*P_0 + \vec{\theta}_1 \wedge \vec{O}^*P_1 \end{array} \right.$$

1.2.3. Accélérations :

Posons : $\vec{\ddot{\Theta}} = \frac{d^2 \vec{\Theta}}{dt^2}$ et $\vec{\ddot{\tau}} = \frac{d^2 \vec{\tau}}{dt^2}$

L'accélération d'un point P de la carène en mouvement s'obtient par dérivation de la vitesse dans le repère fixe :

$$(1.53) \quad \vec{\gamma}(P) = \frac{d \vec{V}(P)}{dt} = \vec{\ddot{\tau}} + \vec{\ddot{\Theta}} \wedge \vec{O} \vec{P} + \vec{\dot{\Theta}} \wedge (\vec{\dot{\Theta}} \wedge \vec{O} \vec{P}) + \vec{\dot{\Theta}} \wedge \vec{\tau}$$

Ce qui donne :

$$(1.54) \quad \left. \begin{array}{l} \text{- à l'ordre 1 :} \\ \vec{\gamma}_1(P) = \vec{\tau}_1 + \vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge \vec{O} \vec{P}_0 \\ \text{- à l'ordre 2 :} \\ \vec{\gamma}_2(P) = \vec{\tau}_2 + \vec{\ddot{\Theta}}_2 \wedge \vec{O} \vec{P}_0 + \vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge [\vec{\tau}_1 + \vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge \vec{O} \vec{P}_0] + \vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge \vec{\tau}_1 + \vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge (\vec{\dot{\Theta}}_1 \wedge \vec{O} \vec{P}_0) \end{array} \right\}$$

1.2.4. Evaluation des integrales sur un domaine en mouvement solide :

Pour calculer les efforts sur un solide, il faut évaluer des intégrales du type :

$$(1.55) \quad I = \int_C f(P) dP$$

P étant un point de la carène déplacée.

Cette intégrale peut être évaluée en faisant le changement de variables permettant d'exprimer les coordonnées de P en fonction de celle de P₀ :

$$(1.56) \quad \vec{O} \vec{P} = \vec{O} \vec{O}' + \vec{O}' \vec{P} = \vec{O} \vec{O}' + R(\vec{O}' \vec{P}_0)$$

Ce qui entraîne :

$$I = \int_{C_0} f [P(P_0)] \det \left[\frac{\partial \vec{O} \vec{P}}{\partial \vec{O}' \vec{P}_0} \right] dP_0$$

en exprimant les coordonnées de P dans le repère de référence, il vient :

$$(1.57) \quad \det \left[\frac{\partial \vec{O} \vec{P}}{\partial \vec{O}' \vec{P}_0} \right] = \det R = 1$$

Donc :

$$(1.58) \quad I = \int_{C_0} f [P(P_0)] dP_0$$

Les intégrales sur des surfaces mobiles seront donc exactement évaluées, après changement de variables, sur leur position initiale C₀.

1.3. CALCUL DES PRESSIONS ET DES EFFORTS :

1.3.1. Repères utilisés :

Pour exprimer les pressions et les efforts, nous considérerons 3 repères :

- Un repère de référence (O_0, x_0, y_0, z_0) qui est un repère orthonormé direct dont l'origine est dans le plan de la surface libre au repos, $O_0 z_0$ étant la verticale ascendante.

- Un repère de calcul des efforts et des mouvements (O, x, y, z) qui est un repère orthonormé direct parallèle au précédent, le point O étant un point quelconque de l'espace. La cote de la flottaison dans ce repère est $z = z_F$.

- Un repère lié au corps (O', x', y', z') orthonormé direct coïncidant au repos avec le repère (O, x, y, z) .

Les efforts seront exprimés dans le repère (O, x, y, z) , les moments seront exprimés par rapport au point mobile O' , puis par rapport au point fixe O .

1.3.2. Positions occupées par la carène au cours de son mouvement :

Au cours de son mouvement, la carène (partie du flotteur immergée) dont la position au repos est C_0 vient en C . La carène étant définie par rapport à la surface libre instantanée, on distinguera : \tilde{C}_0 , qui est la transformée de C_0 dans le mouvement solide du corps, \tilde{SF}_0 qui est la transformée dans le mouvement solide de la surface de flottaison au repos SF_0 , la différence entre \tilde{C}_0 et C étant une surface algébrique S_1 . On supposera que les intégrales sur cette surface S_1 sont du premier ordre en ϵ , les intégrales sur \tilde{C}_0 étant d'ordre 0. Cette hypothèse est consistante avec celle des petits mouvements de la carène, elle suppose au moins, compte tenu de la décroissance exponentielle de l'excitation, que le tirant d'eau de la carène est d'ordre 0 par rapport à ϵ , et que la forme de la carène ne varie pas fortement de part et d'autre de la position au repos.

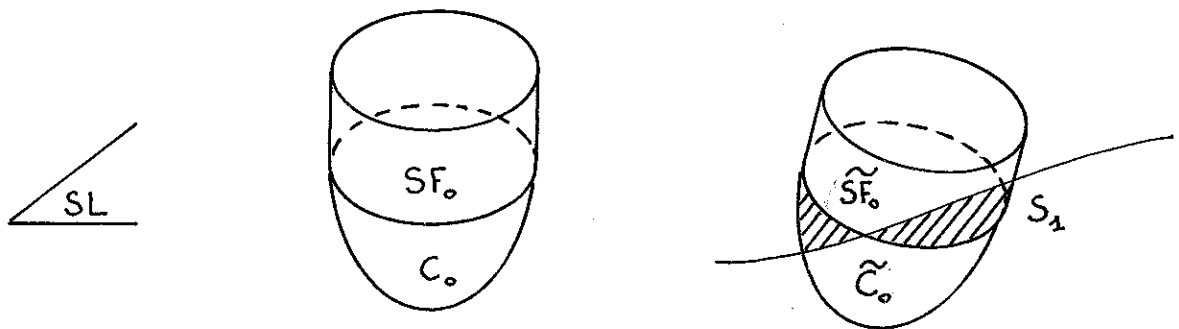


Figure 1.2

1.3.3. Pressions :

Les pressions sont exprimées dans le repère fixe (O,x,y,z) par l'équation de Lagrange :

$$(1.59) \quad p = -\rho g (z-z_F) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\text{grad } \phi)^2 + F(t)$$

avec $F(t) = F_2 + o(\epsilon^2)$ d'après (1.27).

Compte tenu des développements :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(P,t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(P_0,t) + \vec{P}_0 \vec{P} \text{ grad } \frac{\partial \phi}{\partial t}(P_0,t) + o(\epsilon^2)$$

$$\vec{P}_0 \vec{P} = \vec{P}_0 \vec{P}_1 + o(\epsilon)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + o(\epsilon^2)$$

On a aux différents ordres : $p = p_0 + p_1 + p_2 + o(\epsilon^2)$, avec :

$$(1.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = -\rho g (z-z_F)^{(0)} \\ p_1 = -\rho g \vec{P}_0 \vec{P}_1 \vec{i}_z - \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ p_2 = -\rho g \vec{P}_0 \vec{P}_2 \vec{i}_z - \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \rho \vec{P}_0 \vec{P}_1 \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\text{grad } \phi_1)^2 + F_2 \end{array} \right.$$

1.3.4. Efforts :

Les efforts exercés par le fluide sur la carène C sont donnés par :

$$(1.61) \quad \vec{F} = - \iint_C p \cdot \vec{n} \, ds$$

$$(1.62) \quad \vec{F} = - \iint_{\tilde{C}_0 \cup S_1} (p_0 + p_1 + p_2) (\vec{n}_0 + \vec{n}_1 + \vec{n}_2) \, ds$$

d'où aux différents ordres :

$$(1.63) \quad \vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + o(\epsilon^2)$$

$$(1.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_0 = - \iint_{\tilde{C}_0} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, ds \\ \vec{F}_1 = - \iint_{\tilde{C}_0} [p_0 \cdot \vec{n}_1 + p_1 \cdot \vec{n}_0] \, ds - \iint_{S_1} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, ds \\ \vec{F}_2 = - \iint_{\tilde{C}_0} [p_0 \cdot \vec{n}_2 + p_1 \cdot \vec{n}_1 + p_2 \cdot \vec{n}_0] \, ds - \iint_{S_1} [p_0 \cdot \vec{n}_1 + p_1 \cdot \vec{n}_0] \, ds \end{array} \right.$$

Les intégrales sur S_1 étant d'ordre 1 en ϵ .

Ces expressions peuvent être réécrites en tenant compte des identités suivantes :

$$\vec{n}_1 = R_1(\vec{n}_0), \quad \vec{n}_2 = R_2(\vec{n}_0)$$

R_1 et R_2 étant les développements au premier et au second ordre de la rotation R , et en écrivant les intégrales sur C_0 d'après (1.58).

Il vient :

$$(1.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_0 = - \iint_{C_0} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, dS \\ \vec{F}_1 = - \iint_{C_0} [p_0 R_1(\vec{n}_0) + p_1 \vec{n}_0] \, dS - \iint_{S_1} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, dS \\ \vec{F}_2 = - \iint_{C_0} [p_2 \vec{n}_0 + p_1 R_1(\vec{n}_0) + p_0 R_2(\vec{n}_0)] \, dS - \iint_{S_1} [p_0 R_1(\vec{n}_0) + p_1 \vec{n}_0] \, dS \end{array} \right.$$

Les rotations étant les mêmes en tous les points de C_0 et de S_1 peuvent être sorties des intégrales, on a donc :

$$(1.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_0 = - \iint_{C_0} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, dS \\ \vec{F}_1 = R_1(\vec{F}_0) - \iint_{C_0} p_1 \cdot \vec{n}_0 \, dS - \iint_{S_1} p_0 \cdot \vec{n}_0 \, dS \\ \vec{F}_2 = R_2(\vec{F}_0) + R_1[\vec{F}_1 - R_1(\vec{F}_0)] - \iint_{C_0} p_2 \cdot \vec{n}_0 \, dS - \iint_{S_1} p_1 \cdot \vec{n}_0 \, dS \end{array} \right.$$

1.3.5. Moments par rapport au point O' mobile :

$$(1.67) \quad \vec{O}'P = \vec{O}'O + \vec{OP} = -\vec{r} + \vec{OP}$$

et d'après les formules (1.49) :

$$(1.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{O}'P(o) = \vec{OP}_0 \\ \vec{O}'P_1 = R_1(\vec{OP}_0) = \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_0 \\ \vec{O}'P_2 = R_2(\vec{OP}_0) = \vec{\Theta}_2 \wedge \vec{OP}_0 \end{array} \right.$$

L'expression du moment par rapport à O' s'écrit :

$$(1.69) \quad \vec{M}(O') = - \iint_C p \cdot \vec{O}'P \wedge \vec{n} \, dS$$

Soit :

$$(1.70) \quad \vec{M}(O') = - \iint_{\tilde{C}_O} \int_{S_1} [p_O + \epsilon p^{(1)} + \epsilon^2 p^{(2)}] [O\vec{P}^{(0)} + \epsilon O\vec{P}^{(1)} + \epsilon^2 O\vec{P}^{(2)}] \wedge [\vec{n}_O + \epsilon \vec{n}^{(1)} + \epsilon^2 \vec{n}^{(2)}] dS$$

d'où :

$$(1.71) \quad \begin{aligned} \vec{M}^{(0)}(O') &= - \iint_{\tilde{C}_O} p_O (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS \\ \vec{M}_1(O') &= - \iint_{\tilde{C}_O} [p_O [R_1(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O + \vec{OP}_O \wedge R_1(\vec{n}_O)] dS \\ &\quad - \iint_{\tilde{C}_O} p_1 \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS - \iint_{S_1} p_O \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS \\ \vec{M}_2(O') &= - \iint_{\tilde{C}_O} [p_O [\vec{OP}_O \wedge R_2(\vec{n}_O) + R_1(\vec{OP}_O) \wedge R_1(\vec{n}_O) + R_2(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O] dS \\ &\quad - \iint_{\tilde{C}_O} p_1 [R_1(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O + \vec{OP}_O \wedge R_1(\vec{n}_O)] dS \\ &\quad - \iint_{S_1} p_O [R_1(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O + \vec{OP}_O \wedge R_1(\vec{n}_O)] dS \\ &\quad - \iint_{S_1} p_1 \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS \end{aligned}$$

Ces expressions peuvent être simplifiées en utilisant les développements de la formule (1.47) au second ordre :

$$(1.72) \quad R_1(\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) = R_1(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O + R_1(\vec{n}_O) \wedge \vec{OP}_O$$

$$(1.73) \quad R_2(\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) = R_2(\vec{OP}_O) \wedge \vec{n}_O + R_1(\vec{OP}_O) \wedge R_1(\vec{n}_O) + \vec{OP}_O \wedge R_2(\vec{n}_O)$$

En reportant ces identités dans (1.71) et en effectuant les mêmes transformations que pour les forces, il vient :

$$(1.74) \quad \begin{aligned} \vec{M}^{(0)}(O'P) &= - \iint_{\tilde{C}_O} p_O (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS \\ \vec{M}_1(O') &= R_1(\vec{M}^{(0)}) - \iint_{\tilde{C}_O} p_1 \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS - \iint_{S_1} p_O \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS \\ \vec{M}_2(O') &= R_2(\vec{M}^{(0)}) + R_1[\vec{M}_1(O') - R_1(\vec{M}^{(0)})] - \iint_{\tilde{C}_O} p_2 \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS - \iint_{S_1} p_1 \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS \end{aligned}$$

Cette forme est analogue à celle obtenue en (1.66), toutes ces formules peuvent être regroupées en utilisant la normale généralisée \vec{n}_g définie par :

$$(1.75) \quad \left| \begin{array}{ll} \vec{n}_g = \vec{n}_o & \text{pour les forces} \quad \vec{F} = \vec{F}_g \\ \vec{n}_g = \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o & \text{pour les moments} \quad \vec{M} = \vec{F}_g \end{array} \right.$$

$$(1.76) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_{g^0} = - \iint_{C_o} p_o \vec{n}_g \, dS \\ \vec{F}_{g^1} = R_1(\vec{F}_{g^0}) - \iint_{C_o} p_1 \cdot \vec{n}_g \, dS - \iint_{S_1} p_o \cdot \vec{n}_g \, dS \\ \vec{F}_{g^2} = R_2(\vec{F}_{g^0}) + R_1(\vec{F}_{g^1} - R_1(\vec{F}_{g^0})) - \iint_{C_o} p_2 \cdot \vec{n}_g \, dS - \iint_{S_1} p_1 \cdot \vec{n}_g \, dS \end{array} \right.$$

1.3.6. Moments par rapport à un point O fixe :

Le transport du moment en un point O fixe s'effectue par la relation classique :

$$(1.77) \quad \vec{M}(O) = \vec{M}(O') + \vec{OO}' \wedge \vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{OO}' = \vec{r}$$

qui se développe en :

$$(1.78) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{M}(O) = \vec{M}(O') \\ \vec{M}_1(O) = \vec{M}_1(O') + \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_o \\ \vec{M}_2(O) = \vec{M}_2(O') + \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_o \end{array} \right.$$

1.4. EFFORTS EXERCES SUR UNE CARENE :

Dans ce qui précède, nous avons considéré l'ensemble des efforts exercés par le fluide sur la carène. Un examen des formules (1.64) et (1.74) montre que certaines intégrales ne dépendent que de la géométrie du corps et peuvent donc être évaluées indépendamment de la résolution des problèmes hydrodynamiques. Il est possible de décomposer l'ensemble des efforts auxquels est soumise une carène en quatre parties : les forces extérieures (forces de pesanteur et forces de liaison), les efforts hydrodynamiques fonction des potentiels ϕ_1 et ϕ_2 , les efforts hydrostatiques où les mouvements des corps n'interviennent que comme facteur multiplicatif et les intégrales sur S_1 .

1.4.1. Forces extérieures :

- Forces de pesanteur :

Les forces de pesanteur sont données aux différents ordres par :

$$(1.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_p^{(o)} = + Mg \vec{i}_z \\ \vec{F}_{p1} = \vec{0} \\ \vec{F}_{p2} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Les moments par rapport au point mobile O' s'écrivent :

$$(1.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_p^{(o)} = + Mg [-Y_{G_o} \vec{i}_x + X_{G_o} \vec{i}_y] = - Mg \vec{i}_z \wedge \vec{OG}_o \\ \vec{M}_{P1}^{(o')} = + Mg \vec{i}_z \wedge R_1 (\vec{OG}_o) \\ \vec{M}_{P1}^{(o')} = + Mg [(-e_{z_1} X_{G_o} + e_{x_1} Z_{G_o}) \vec{i}_x + (-e_{z_1} Y_{G_o} + e_{y_1} Z_{G_o}) \vec{i}_y] \\ \vec{M}_{P2}^{(o')} = + Mg \vec{i}_z \wedge R_2 (\vec{OG}_o) \\ \vec{M}_{P2}^{(o')} = + Mg [(-e_{z_2} X_{G_o} + e_{x_2} Z_{G_o}) \vec{i}_x + (-e_{z_2} Y_{G_o} + e_{y_2} Z_{G_o}) \vec{i}_y] \\ \quad + \frac{Mg}{2} [- [e_{x_1} e_{y_1} X_{G_o} - (e_{x_1}^2 + e_{z_1}^2) Y_{G_o} + e_{y_1} e_{z_1} Z_{G_o}] \vec{i}_x + \\ \quad [-(e_{y_1}^2 + e_{z_1}^2) X_{G_o} + e_{x_1} e_{y_1} Y_{G_o} + e_{x_1} e_{z_1} Z_{G_o}] \vec{i}_y] \end{array} \right.$$

où $X_{G_o}, Y_{G_o}, Z_{G_o}$ sont les coordonnées du centre de gravité du corps au repos dans le repère (O, x, y, z) défini par :

$$\vec{OG}_o = \frac{1}{M} \int_M \vec{OP}_o \, dm$$

Ces moments se transportent en un point fixe O par :

$$(1.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_p^{(o)} = \vec{M}_p^{(o')} \\ \vec{M}_{P1}^{(o)} = \vec{M}_{P1}^{(o')} + Mg [\tau_{y_1} \vec{i}_x - \tau_{x_1} \vec{i}_y] \\ \vec{M}_{P2}^{(o)} = \vec{M}_{P2}^{(o')} + Mg [\tau_{y_2} \vec{i}_x - \tau_{x_2} \vec{i}_y] \end{array} \right.$$

- Forces de liaison :

La carène peut être soumise à un ensemble de forces extérieures quelconques que nous noterons \vec{F}_L et \vec{M}_L .

1.4.2. Efforts hydrodynamiques :

Les efforts hydrodynamiques sont obtenus en reportant les termes en ϕ_1 , ϕ_2 et F_2 des équations (1.60) dans les formules (1.65) et (1.71).

Il vient , pour les forces :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_d^{(o)} &= \vec{0} \\
 \vec{F}_{d_1} &= - \iint_{C_o} p_1 \cdot \vec{n}_o \, ds = \rho \iint_{C_o} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \cdot \vec{n}_o \, ds \\
 \vec{F}_{d_2} &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{d_1} + \rho \iint_{C_o} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_1)^2 + p_o \vec{p}_1 \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{F_2}{\epsilon} \int \vec{n}_o \, ds \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.82}$$

Les moments par rapport à un point mobile O' sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_d^{(o)} &= \vec{0} \\
 \vec{M}_{d_1}(O') &= - \iint_{C_o} p_1 (\vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o) \, ds = \rho \iint_{C_o} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} (\vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o) \, ds \\
 \vec{M}_{d_2}(O') &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{M}_{d_1}(O') + \rho \iint_{C_o} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_1)^2 + \right. \\
 &\quad \left. p_o \vec{p}_1 \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{F_2}{\epsilon} \int \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o \, ds \right]
 \end{aligned}
 \tag{1.83}$$

Les transports par rapport à un point fixe O des efforts hydrodynamiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_d^{(o)}(O) &= \vec{0} \\
 \vec{M}_{d_1}(O) &= \vec{M}_{d_1}(O') \\
 \vec{M}_{d_2}(O) &= \vec{M}_{d_2}(O') + \vec{\tau}_1 \wedge \vec{F}_{d_1}
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

1.4.3. Efforts hydrostatiques :

- Forces :

Posons $\vec{OP}_0 = X \vec{i}_x + Y \vec{i}_y + Z \vec{i}_z$, les forces hydrostatiques sont données à l'ordre 0 par :

$$(1.85) \quad \left. \begin{aligned} \vec{F}^{(0)} &= + \iint_{C_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} \vec{n}_0 \, dS \\ &= \iint_{C_0 \cup SF_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} \vec{n}_0 \, dS - \iint_{SF_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} \vec{n}_0 \, dS \end{aligned} \right\}$$

SF_0 étant la surface de flottaison au repos, on a sur cette surface : $\vec{n}_0 = \vec{i}_z$ et $z^{(0)} = z_F$, ce qui entraîne que l'intégrale sur SF_0 est nulle. Par ailleurs $C_0 \cup SF_0$ est une surface fermée qui délimite un volume V_0 correspondant au déplacement de la carène au repos. On peut appliquer la formule du gradient dans le volume V_0 , \vec{n}_0 étant la normale extérieure au volume. Il vient :

$$(1.86) \quad \vec{F}_h^{(0)} = \iiint_{V_0} \rho g \text{grad} (z-z_F) \, dV = \rho g V_0 \vec{i}_z$$

A l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{h1} &= R_1(\vec{F}_h^{(0)}) + \iint_{C_0} \rho g \vec{P}_0 \vec{P}_1 \vec{i}_z \vec{n}_0 \, dS = R_1(\vec{F}_h^{(0)}) + I_1 \\ R_1(\vec{F}_h^{(0)}) &= \rho g V_0 \vec{E}_1 \wedge \vec{i}_z = \rho g V_0 [\Theta_{y1} \vec{i}_x - \Theta_{x1} \vec{i}_y] \end{aligned}$$

d'après (1.49) :

$$\vec{P}_0 \vec{P}_1 \cdot \vec{i}_z = \tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y$$

L'intégrale I_1 s'écrit alors :

$$I_1 = \iint_{C_0 \cup SF_0} \rho g (\tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y) \vec{n}_0 \, dS - \iint_{SF_0} \rho g (\tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y) \vec{n}_0 \, dS$$

$$I_1 = \iiint_{V_0} \rho g \text{grad} (\tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y) \, dV - \iint_{SF_0} \rho g (\tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y) \vec{n}_0 \, dS$$

$$I_1 = \rho g V_0 [-\Theta_y \vec{i}_x + \Theta_x \vec{i}_y] - \iint_{SF_0} \rho g (\tau_z - \Theta_y X + \Theta_x Y) \vec{i}_z \, dS$$

Le premier terme se simplifie avec $R_1(\vec{F}_h^{(0)})$, et après avoir posé :

$$S_{33} = \iint_{SF_0} \rho g \, dS = \rho g SF_0$$

$$S_{34} = \iint_{SF_0} \rho g Y \, dS$$

$$S_{35} = - \iint_{SF_0} \rho g x \, ds$$

il vient :

$$(1.87) \quad \vec{F}_{h_1} = - [S_{33} \tau_{z_1} + S_{34} e_{x_1} + S_{35} e_{y_1}] \vec{i}_z$$

A l'ordre 2, on effectue le même développement :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{h_2} &= R_2(\vec{F}_h^{(0)}) + R_1[\vec{F}_{h_1} - R_1(\vec{F}_h^{(0)})] + \iint_{C_0} \rho g \vec{P}_0 \vec{P}_2 \vec{i}_z \vec{n}_0 \, ds \\ R_2(\vec{F}_h^{(0)}) &= \rho g v_0 (e_{y_2} \vec{i}_x - e_{x_2} \vec{i}_y) + \frac{\rho g v_0}{2} [e_{x_1} e_{z_1} \vec{i}_x + e_{y_1} e_{z_1} \vec{i}_y - (e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2) \vec{i}_z] \\ R_1[\vec{F}_{h_1} - R_1(\vec{F}_h^{(0)})] &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{h_1} - \vec{\Theta}_1 \wedge R_1(\vec{F}_h^{(0)}) \\ &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{h_1} - [e_{z_1} e_{x_1} \vec{i}_x - e_{y_1} e_{z_1} \vec{i}_y + (e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2) \vec{i}_z] \\ \vec{P}_0 \vec{P}_2 \cdot \vec{i}_z &= \tau_{z_2} + \frac{1}{2} [e_{x_1} e_{z_1} x + e_{y_1} e_{z_1} y - (e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2) z] \end{aligned}$$

Par le même procédé que pour le premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{C_0} \vec{P}_0 \vec{P}_2 \vec{i}_z \vec{n}_0 \, ds &= \rho g v_0 [e_{x_1} e_{z_1} x + e_{y_1} e_{z_1} y - (e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2) \vec{i}_z + \\ &\quad \rho g v_0 [-e_{y_2} \vec{i}_x + e_{x_2} \vec{i}_y] \\ - \iint_{SF_0} \rho g [\tau_{z_2} + \frac{1}{2} [e_{x_1} e_{z_1} x + e_{y_1} e_{z_1} y - (e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2) z] - \\ &\quad e_{y_2} x + e_{x_2} y] \, ds \end{aligned}$$

Soit, après simplifications, compte tenu de $Z = z_F$ sur SF_0 :

$$(1.88) \quad \vec{F}_{h_2} = \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{h_1} - [S_{33} [\tau_{z_2} - \frac{(e_{x_1}^2 + e_{y_1}^2)}{2} z_F] + S_{34} [e_{x_2} + \frac{e_{y_1} e_{z_1}}{2}] + S_{35} [e_{y_2} - \frac{e_{x_1} e_{z_1}}{2}]] \vec{i}_z$$

- Moments par rapport au point O' mobile :

A l'ordre 0, on écrit :

$$\vec{M}_h^{(0)}(O') = \iint_{C_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS$$

$$\vec{M}_h^{(0)}(O') = \iint_{C_0 \cup SF_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS - \iint_{SF_0} \rho g (z-z_F)^{(0)} (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS$$

Pour la même raison que pour les forces, l'intégrale sur la surface de flottaison au repos est nulle, on peut appliquer à la première intégrale la formule du rotationnel:

$$\vec{M}_h^{(0)}(O') = - \iiint_{V_0} \text{Rot} [\rho g (z-z_F)^{(0)} \vec{OP}_O] dV$$

Or :

$$\text{Rot} [\rho g (z-z_F)^{(0)} \vec{OP}_O] = \rho g (z-z_F)^{(0)} \text{Rot} \vec{OP}_O + \text{grad} \rho g (z-z_F)^{(0)} \wedge \vec{OP}_O$$

d'où :

$$\vec{M}_h^{(0)}(O') = - \iiint_{V_0} \rho g (\vec{i}_z \wedge \vec{OP}_O) dV = - \vec{i}_z \wedge \rho g \iiint_{V_0} \vec{OP}_O dV$$

Si l'on définit le centre de carène C_0 par :

$$\vec{OC}_0 = \frac{1}{V_0} \iiint_{V_0} \vec{OP}_O dV = x_{C_0} \vec{i}_x + y_{C_0} \vec{i}_y + z_{C_0} \vec{i}_z$$

il vient :

$$(1.89) \quad \vec{M}_h^{(0)}(O') = - \rho g V_0 (-y_{C_0} \vec{i}_x + x_{C_0} \vec{i}_y)$$

A l'ordre 1, on a :

$$\vec{M}_{h_1}^{(0)}(O') = R_1(\vec{M}_h^{(0)}(O')) + \iint_{C_0} \rho g P_{O_1} \vec{i}_z \vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O dS = R_1(\vec{M}_h^{(0)}(O')) + I_2$$

$$R_1(\vec{M}_h^{(0)}(O')) = - \rho g V_0 [-\epsilon_{z_1} x_{C_0} \vec{i}_x - \epsilon_{z_1} y_{C_0} \vec{i}_y + (x_{C_0} \epsilon_{x_1} + y_{C_0} \epsilon_{y_1}) \vec{i}_z]$$

$$I_2 = \rho g \iint_{C_0 \cup SF_0} P_{O_1} \vec{i}_z (\vec{OP}_O \wedge \vec{n}_O) dS - \rho g \iint_{SF_0} P_{O_1} \vec{i}_z (\vec{OP}_O \wedge \vec{i}_z) dS$$

$$I_1 = -\rho g V_o (\theta_{y_1} \vec{i}_x + \theta_{x_1} \vec{i}_y) \wedge \vec{OC}_o - \rho g \iint_{SF_o} (\tau_{z_1} - \theta_{y_1} x + \theta_{x_1} y) (\vec{OP}_o \wedge \vec{i}_z) ds$$

$$I_1 = -\rho g V_o [\theta_{x_1} z_{c_o} \vec{i}_x + \theta_{y_1} z_{c_o} \vec{i}_y - (\theta_{x_1} x_{c_o} + \theta_{y_1} y_{c_o}) \vec{i}_z]$$

$$- \rho g \iint_{SF_o} (\tau_{z_1} - \theta_{y_1} x + \theta_{x_1} y) (y \vec{i}_x - x \vec{i}_y) ds$$

En posant :

$$s_{45} = -\rho g \iint_{SF_o} xy ds$$

$$s'_{44} = \rho g \iint_{SF_o} y^2 ds$$

$$s'_{55} = \rho g \iint_{SF_o} x^2 ds$$

le moment hydrostatique au premier ordre s'écrit :

$$(1.90) \vec{M}_{h_1}^{(o')} = [-\tau_{z_1} s_{34} - \theta_{x_1} s'_{44} - \theta_{y_1} s_{45} - \rho g V_o (\theta_{x_1} z_{c_o} - \theta_{z_1} x_{c_o})] \vec{i}_x$$

$$[-\tau_{z_1} s_{35} - \theta_{x_1} s_{45} - \theta_{y_1} s'_{55} - \rho g V_o (\theta_{y_1} z_{c_o} - \theta_{z_1} y_{c_o})] \vec{i}_y$$

A l'ordre 2, on a de même :

$$\vec{M}_{h_2}^{(o')} = R_2(\vec{M}^{(o)}) + R_1[\vec{M}_{h_1}^{(o')} - R_1(\vec{M}_h^{(o)})] + \rho g \iint_{C_o} p_o p_2 \vec{i}_z \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o ds$$

$$R_2(\vec{M}_h^{(o)}) = -\rho g V_o [-\theta_{z_2} x_{c_o} \vec{i}_x - \theta_{z_2} y_{c_o} \vec{i}_y + (x_{c_o} \theta_{x_2} + y_{c_o} \theta_{y_2}) \vec{i}_z]$$

$$- \frac{\rho g V_o}{2} [[(\theta_{y_1}^2 + \theta_{z_1}^2) y_{c_o} + \theta_{x_1} \theta_{y_1} x_{c_o}] \vec{i}_x$$

$$+ [-\theta_{x_1} \theta_{y_1} y_{c_o} - (\theta_{x_1}^2 + \theta_{z_1}^2) x_{c_o}] \vec{i}_y$$

$$+ [-\theta_{x_1} \theta_{z_1} y_{c_o} + \theta_{y_1} \theta_{z_1} x_{c_o}] \vec{i}_z]$$

$$R_1 [\vec{M}_{h_1}^{(o')} - R_1(\vec{M}_h^{(o)})] = R_1 [\vec{M}_{h_1}^{(o')}] - R_1 [R_1(\vec{M}_h^{(o)})]$$

En posant :

$$\vec{M}_{h_1}^{(o')} = \vec{M}_{h_1}^{(o)} + \rho g V_o [\theta_{z_1} x_{c_o} \vec{i}_x + \theta_{z_1} y_{c_o} \vec{i}_y]$$

il vient :

$$R_1[\vec{M}_{h_1}(O')] = R_1[\vec{M}_{h_1}^1(O')] + \rho g V_0 [-\theta_{z_1}^2 Y_{c_0} \vec{i}_x + \theta_{z_1}^2 X_{c_0} \vec{i}_y + (-\theta_{y_1} \theta_{z_1} X_{c_0} + \theta_{x_1} \theta_{z_1} Y_{c_0}) \vec{i}_z]$$

$$-R_1[R_1(\vec{M}_{h_1}^1(O'))] = \rho g V_0 [(\theta_{z_1}^2 Y_{c_0} + \theta_{y_1}^2 Y_{c_0} + \theta_{x_1} \theta_{y_1} X_{c_0}) \vec{i}_x - (\theta_{z_1}^2 X_{c_0} + \theta_{x_1}^2 X_{c_0} + \theta_{x_1} \theta_{y_1} Y_{c_0}) \vec{i}_z$$

$$+ (\theta_{y_1} \theta_{z_1} X_{c_0} - \theta_{x_1} \theta_{z_1} Y_{c_0}) \vec{i}_y]$$

soit :

$$I = \rho g \iint_{C_0} P_0 P_2 \vec{i}_z \vec{OP}_0 \wedge \vec{n}_0 dS = \rho g \iint_{C_0} [\tau_{z_2} - \theta_{y_2} X + \theta_{x_2} Y + \frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2} X + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2} Y -$$

$$\frac{(\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2)}{2} Z] \vec{OP}_0 \wedge \vec{n}_0 dS$$

et, après application de la formule du rotationnel :

$$I = -\rho g V_0 [(\theta_{x_2} + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2}) Z_{c_0} + \frac{(\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2)}{2} Y_{c_0}] \vec{i}_x + [-\frac{(\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2)}{2} X_{c_0} -$$

$$(\frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2} - \theta_{y_2}) Z_{c_0}] \vec{i}_y$$

$$+ [(\frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2} - \theta_{y_2}) Y_{c_0} - (\theta_{x_2} + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2}) X_{c_0}] \vec{i}_z]$$

$$-\rho g \iint_{SF_0} [\tau_{z_2} + \frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2} X + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2} Y - \frac{(\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2)}{2} Z - \theta_{y_2} X + \theta_{x_2} Y] \vec{OP}_0 \wedge \vec{i}_z dS$$

ce qui entraîne :

$$(1.91) \quad \vec{M}_{h_2}(O') = \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{M}_{h_1}(O') - [(\tau_{z_2} - \frac{\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2}{2} Z_F) S_{34} - (\theta_{x_2} + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2}) S'_{44} -$$

$$(\theta_{y_2} - \frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2}) S_{45}] \vec{i}_x$$

$$- [(\tau_{z_2} - \frac{\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2}{2} Z_F) S_{35} - (\theta_{x_2} + \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2}) S_{45} -$$

$$(\theta_{y_2} - \frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2}) S'_{55}] \vec{i}_y$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho g V_o [\theta_{z_2} x_{c_o} - \theta_{x_2} z_{c_o} - \frac{1}{2} (\theta_{x_1}^2 + \theta_{z_1}^2) y_{c_o} + \frac{\theta_{x_1} \theta_{y_1}}{2} x_{c_o} - \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{\theta_{y_1} \theta_{z_1}}{2} z_{c_o}] \vec{i}_x \\
 & + \rho g V_o [\theta_{z_2} x_{c_o} - \theta_{y_2} z_{c_o} + \frac{1}{2} (\theta_{y_1}^2 + \theta_{z_1}^2) x_{c_o} - \frac{\theta_{x_1} \theta_{y_1}}{2} y_{c_o} + \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{\theta_{x_1} \theta_{z_1}}{2} z_{c_o}] \vec{i}_y
 \end{aligned}$$

- Transports en un point O fixe :

Le transport est effectué classiquement à l'aide des relations :

$$(1.92) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \vec{M}_h^{(o)} &= \vec{M}_h^{(o')} \\
 \vec{M}_{h_1}^{(o)} &= \vec{M}_{h_1}^{(o')} + \rho g V_o (\tau_{y_1} \vec{i}_x - \tau_{x_1} \vec{i}_y) \\
 \vec{M}_{h_2}^{(o)} &= \vec{M}_{h_2}^{(o')} + \vec{\tau}_1 \wedge \vec{F}_{h_1} + \rho g V_o (\tau_{y_2} \vec{i}_x - \tau_{x_2} \vec{i}_y)
 \end{aligned} \right.$$

1.4.4. Intégrales sur S_1 :

D'après (1.76), les intégrales sur S_1 sont composées de termes en p_0 et p_1 donnés par (1.60). Compte tenu du fait que sur S_1 , $(z-z_F)^{(o)} = 0$, seules subsistent les intégrales en p_1 qui se mettent sous la forme :

$$(1.93) \quad \vec{F}_c = \iint_{S_1} [\rho g \vec{P}_o \vec{P}_1 \vec{i}_z + \rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t}] \vec{n}_g \, ds$$

\vec{n}_g étant la normale généralisée $(\vec{n}_o, \vec{O}\vec{P}_o \wedge \vec{n}_o)$

La cote de la déformée de la surface libre au premier ordre à la flottaison est :

$$\zeta_1 = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Le déplacement au même ordre d'un point de la flottaison par rapport à sa position de repos est :

$$z_1 = \vec{P}_o \vec{P}_1 \cdot \vec{i}_z \Big|_{z=0}$$

L'intégrale sur S_1 peut être calculée en intégrant sur le contour de la flottaison Γ_0 et sur un segment vertical, soit :

$$\vec{F}_C = \int_{\Gamma_0} d\Gamma \cdot \int_{z_1}^{\zeta_1} \rho g [z - \zeta_1] \vec{n}_g dz$$

avec

$$\zeta_1 = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

$$\vec{F}_C = \int_{\Gamma_0} \rho g \left[\frac{z^2}{2} - \zeta_1 z \right]_{z_1}^{\zeta_1} \vec{n}_g d\Gamma_0$$

$$\vec{F}_C = - \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} (\zeta_1 - z_1)^2 \vec{n}_g d\Gamma_0$$

on a donc :

$$(1.94) \quad \left. \begin{aligned} \vec{F}_C^{(0)} &= \vec{0} \\ \vec{F}_{C_1} &= \vec{0} \\ \vec{F}_{C_2} &= - \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} (\zeta_1 - z_1)^2 \vec{n}_0 d\Gamma_0 \\ \vec{M}_C^{(0)} &= \vec{0} \\ \vec{M}_{C_1} &= \vec{0} \\ \vec{M}_{C_2}^{(0')} &= - \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} (\zeta_1 - z_1)^2 \vec{OP}_0 \wedge \vec{n}_0 d\Gamma_0 \end{aligned} \right\}$$

On peut remarquer que dans ces formules, \vec{n}_0 est la normale à la carène à la flottaison, et non la normale dans le plan de flottaison. Le terme \vec{F}_C permet donc de tenir compte de la pente de la carène.

Les moments par rapport à un point O fixe sont les mêmes que par rapport au point O' mobile, les transports n'intervenant qu'aux ordres supérieurs à 2.

1.4.5. Bilan des efforts :

Si le flotteur est en équilibre initial, la résultante des efforts est nulle. Ceci entraîne, en l'absence de forces de liaison :

$$M_g = \rho g V_0 \quad \text{d'après (1.79) et (1.86)}$$

et :

$$\left| \begin{aligned} X_{C_0} &= X_{G_0} \\ Y_{C_0} &= Y_{G_0} \end{aligned} \right. \quad \text{d'après (1.80) et (1.87)}$$

On peut alors regrouper les efforts hydrostatiques et les efforts de pesanteur.
Après avoir posé :

$$\begin{aligned}
 \vec{OP}_O &= x \vec{i}_x + y \vec{i}_y + z \vec{i}_z \\
 \vec{OC}_O &= \frac{1}{V_O} \iiint_{V_O} \vec{OP}_O \, dV = X_{C_O} \vec{i}_x + Y_{C_O} \vec{i}_y + Z_{C_O} \vec{i}_z \\
 \vec{OG}_O &= \frac{1}{M} \int_M \vec{OP}_O \, dm = X_{G_O} \vec{i}_x + Y_{G_O} \vec{i}_y + Z_{G_O} \vec{i}_z \\
 S_{33} &= \rho g \iint_{SF_O} dS = \rho g SF_O \\
 (1.95) \quad S_{34} &= \rho g \iint_{SF_O} Y \, dS = S_{43} \\
 S_{35} &= -\rho g \iint_{SF_O} X \, dS = S_{53} \\
 S_{44} &= \rho g \iint_{SF_O} Y^2 \, dS + \rho g V_O (Z_{C_O} - Z_{G_O}) = S'_{44} + \rho g V_O (Z_{C_O} - Z_{G_O}) \\
 S_{45} &= -\rho g \iint_{SF_O} X Y \, dS = S_{54} \\
 S_{55} &= \rho g \iint_{SF_O} X^2 \, dS + \rho g V_O (Z_{C_O} - Z_{G_O}) = S'_{55} + \rho g V_O (Z_{C_O} - Z_{G_O}) \\
 \vec{F}_{hs} &= \vec{F}_h + \vec{F}_p \\
 \text{et} \\
 \vec{M}_{hs} &= \vec{M}_h + \vec{M}_p
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 (1.96) \quad \vec{F}_{hs}^{(o)} &= \vec{0} \\
 \vec{F}_{hs_1} &= - [S_{33} \tau_{z_1} + S_{34} \Theta_{x_1} + S_{35} \Theta_{y_1}] \vec{i}_z \\
 \vec{F}_{hs_2} &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{hs_1} - [S_{33} (\tau_{z_2} - \frac{\Theta_{x_1}^2 + \Theta_{y_1}^2}{2} z_F) + S_{34} (\Theta_{x_2} + \frac{\Theta_{y_1} \Theta_{z_1}}{2}) + \\
 &\quad S_{35} (\Theta_{y_2} - \frac{\Theta_{x_1} \Theta_{z_1}}{2})] \vec{i}_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{hs}^{(o)}(O') &= \vec{0} \\
 \vec{M}_{hs_1}^{(o)}(O') &= - [\tau_{z_1} s_{34} + \varrho_{x_1} s_{44} + \varrho_{y_1} s_{45}] \vec{i}_x - \\
 &\quad [\tau_{z_1} s_{35} + \varrho_{x_1} s_{45} + \varrho_{y_1} s_{55}] \vec{i}_y \\
 \vec{M}_{hs_2}^{(o)}(O') &= - [(\tau_{z_2} - \frac{\varrho_{x_1}^2 + \varrho_{y_1}^2}{2} z_F) s_{34} + (\varrho_{x_2} + \frac{\varrho_{y_1} \varrho_{z_1}}{2}) s_{44} + \\
 &\quad (\varrho_{y_2} - \frac{\varrho_{x_1} \varrho_{z_1}}{2}) s_{45}] \vec{i}_x \\
 &\quad - [(\tau_{z_2} - \frac{\varrho_{x_1}^2 + \varrho_{y_1}^2}{2} z_F) s_{35} + (\varrho_{x_2} + \frac{\varrho_{y_1} \varrho_{z_1}}{2}) s_{45} + \\
 &\quad (\varrho_{y_2} - \frac{\varrho_{x_1} \varrho_{z_1}}{2}) s_{55}] \vec{i}_y \\
 &\quad + \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{M}_{hs_1}^{(o)}(O')
 \end{aligned}
 \tag{1.97}$$

Le transport au point O fixe étant effectué par :

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{hs}^{(o)}(O') &= \vec{M}_{hs}^{(o)}(O) \\
 \vec{M}_{hs_1}^{(o)}(O') &= \vec{M}_{hs_1}^{(o)}(O) \\
 \vec{M}_{hs_2}^{(o)}(O') &= \vec{M}_{hs_2}^{(o)}(O) + \vec{\tau}_1 \wedge \vec{F}_{hs_1}
 \end{aligned}
 \tag{1.98}$$

En notation matricielle, à l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \vec{F}_{hs_1} \\ \vec{M}_{hs_1} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & s_{35} & 0 \\ 0 & 0 & s_{43} & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & s_{53} & s_{54} & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_1 \\ \vec{\Theta}_1 \end{pmatrix} = - \vec{S} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_1 \\ \vec{\Theta}_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{1.99}$$

La matrice \vec{S} est une matrice symétrique .

On peut regrouper de manière semblable les efforts hydrodynamiques et les intégrales sur S_1 puisque ces termes ne sont connus qu'après résolution des problèmes hydrodynamiques :

$$\begin{cases} \vec{F}_{hd} = \vec{F}_d + \vec{F}_c \\ \vec{M}_{hd} = \vec{M}_d + \vec{M}_c \end{cases}$$

avec :

$$\zeta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad \text{et} \quad z_1 = \vec{p}_o p_1 \cdot \vec{i}_z \Big|_{z=0}$$

on a :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{hd}^{(o)} &= \vec{0} \\ \vec{F}_{hd_1} &= \rho \iint_{C_o} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \vec{n}_o \, ds = - \iint_{C_o} p_1 \cdot \vec{n}_o \, ds \\ \vec{F}_{hd_2} &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{F}_{hd_1} + \\ (1.100) \quad & \rho \iint_{C_o} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_1)^2 + p_o p_1 \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + F_2 \right] \vec{n}_o \, ds - \\ & \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_o} (\zeta_1 - z_1)^2 \vec{n}_o \, d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{hd}^{(o)} &= \vec{0} \\ \vec{M}_{hd_1} &= \rho \iint_{C_o} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o \, ds = - \iint_{C_o} p_1 (\vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o) \, ds \\ (1.101) \quad \vec{M}_{hd_2} &= \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{M}_{hd_1} + \\ & \rho \iint_{C_o} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_1)^2 + p_o p_1 \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + F_2 \right] \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o \, ds \\ & - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_o} (\zeta_1 - z_1)^2 \vec{OP}_o \wedge \vec{n}_o \, d\Gamma \end{aligned}$$

le transport du moment en un point O fixe étant donné par :

$$(1.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_{hd}^{(O)} = \vec{M}_{hd}^{(O')} \\ \vec{M}_{hd1}^{(O)} = \vec{M}_{hd1}^{(O')} \\ \vec{M}_{hd2}^{(O)} = \vec{M}_{hd2}^{(O')} + \vec{\tau}_1 \wedge \Delta \vec{F}_{hd1} \end{array} \right.$$

Ces termes seront explicités dans le chapitre suivant.

1.5. EFFORTS D'INERTIE :

Les efforts d'inertie sont habituellement exprimés sans approximation dans un repère lié au corps en mouvement . Cependant, les efforts et les mouvements aux différents ordres étant connus dans le repère fixe (O,x,y,z), nous développerons les efforts d'inertie aux différents ordres dans ce repère.

Les efforts d'inertie pour un corps en mouvement solide sont donnés par :

$$(1.103) \quad \vec{F}_M = \int_M \vec{\gamma}_E(P) dm \quad \text{et} \quad \vec{M}_M = \int_M \vec{OP} \wedge \vec{\gamma}_E(P) dm$$

Posons : $\vec{OP}_O = x \vec{i}_x + y \vec{i}_y + z \vec{i}_z$

Le centre de gravité G du corps au repos est défini par :

$$M \vec{OG}_O = \int_M \vec{OP}_O dm$$

- Forces d'inertie :

Les forces d'inertie développées aux différents ordres donnent, d'après le paragraphe 1.2.3:

à l'ordre 1 :

$$(1.104) \quad \vec{F}_{M_1} = M \ddot{\vec{\tau}}_1 + M \ddot{\vec{\theta}}_1 \wedge \vec{OG}_O$$

à l'ordre 2 :

$$(1.105) \quad \vec{F}_{M_2} = M \ddot{\vec{\tau}}_2 + M \ddot{\vec{\theta}}_2 \wedge \vec{OG}_O + M \ddot{\vec{\theta}}_1 \wedge \vec{\tau}_1 + M \ddot{\vec{\theta}}_1 \wedge (\vec{\theta}_1 \wedge \vec{OG}_O) \\ + M \dot{\vec{\theta}}_1 \wedge \dot{\vec{\tau}}_1 + M \dot{\vec{\theta}}_1 \wedge (\dot{\vec{\theta}}_1 \wedge \vec{OG}_O)$$

- Moments d'inertie :

En procédant de la même façon avec les moments d'inertie, on obtient :

à l'ordre 1 :

$$(1.106) \quad \vec{M}_{M_1} = \int_M \vec{OP}_O \wedge \vec{\gamma}_1 \, dm = M(\vec{OG}_O \wedge \vec{\tau}_1) + \int_M [\ddot{\Theta}_1 (\vec{OP}_O)^2 - \vec{OP}_O (\vec{OP}_O \cdot \ddot{\Theta}_1)] \, dm$$

à l'ordre 2 :

$$\vec{M}_{M_2} = \int_M [\vec{OP}_O \wedge \vec{\gamma}_2 + \vec{OP}_1 \wedge \vec{\gamma}_1] \, dm$$

et compte tenu de : $\vec{OP}_1 = \vec{\tau}_1 + \vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_O$

$$(1.107) \quad \left. \begin{aligned} \vec{M}_{M_2} &= M(\vec{OG}_O \wedge \vec{\tau}_2) + \int_M [\ddot{\Theta}_2 (\vec{OP}_O)^2 - \vec{OP}_O (\vec{OP}_O \cdot \ddot{\Theta}_2)] \, dm \\ &+ M \vec{OG}_O \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{\tau}_1) + M \vec{OG}_O \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{\tau}_1) \\ &+ \int_M \vec{OP}_O \wedge [\ddot{\Theta}_1 \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_O)] \, dm + \int_M \vec{OP}_O \wedge [\ddot{\Theta}_1 \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_O)] \, dm \\ &+ M \vec{\tau}_1 \wedge \vec{\tau}_1 + M \vec{\tau}_1 \wedge (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OG}_O) + M (\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OG}_O) \wedge \vec{\tau}_1 \\ &+ \int_M [(\vec{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_O) \wedge (\ddot{\Theta}_1 \wedge \vec{OP}_O)] \, dm \end{aligned} \right\}$$

- Notation matricielle :

L'expression des efforts au premier ordre peut être simplifiée en utilisant la notation matricielle. Après avoir posé :

$$I_{44} = \int_M (Y^2 + Z^2) \, dm, \quad I_{55} = \int_M (Z^2 + X^2) \, dm, \quad I_{66} = \int_M (X^2 + Y^2) \, dm$$

$$I_{45} = I_{54} = - \int_M XY \, dm, \quad I_{46} = I_{64} = - \int_M XZ \, dm, \quad I_{56} = I_{65} = - \int_M YZ \, dm$$

Le moment à l'ordre 1 s'écrit :

$$(1.108) \quad \vec{M}_{M_1} = M(\vec{OG}_O \wedge \vec{\tau}_1) + \vec{I}_I \ddot{\Theta}_1$$

avec :

$$\bar{\bar{I}}_I = \begin{vmatrix} I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ I_{54} & I_{55} & I_{56} \\ I_{64} & I_{65} & I_{66} \end{vmatrix}$$

Si l'on pose :

$$(1.109) \quad \bar{P} = \begin{vmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{T} = \begin{vmatrix} 0 & M_{ZG_0} & -M_{YG_0} \\ -M_{ZG_0} & 0 & M_{XG_0} \\ M_{YG_0} & -M_{XG_0} & 0 \end{vmatrix}$$

L'ensemble des efforts d'inertie à l'ordre 1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(1.110) \quad \begin{vmatrix} F_{MX_1} \\ F_{MY_1} \\ F_{MZ_1} \\ M_{MX_1} \\ M_{MY_1} \\ M_{MZ_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M & 0 & 0 & 0 & M_{ZG_0} & -M_{YG_0} \\ 0 & M & 0 & -M_{ZG_0} & 0 & M_{XG_0} \\ 0 & 0 & M & M_{YG_0} & -M_{XG_0} & 0 \\ 0 & -M_{ZG_0} & M_{YG_0} & I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ M_{ZG_0} & 0 & -M_{XG_0} & I_{54} & I_{55} & I_{56} \\ -M_{YG_0} & M_{XG_0} & 0 & I_{64} & I_{65} & I_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\tau}_{x_1} \\ \ddot{\tau}_{y_1} \\ \ddot{\tau}_{z_1} \\ \ddot{\theta}_{x_1} \\ \ddot{\theta}_{y_1} \\ \ddot{\theta}_{z_1} \end{vmatrix}$$

ou bien, en notation matricielle :

$$(1.111) \quad \begin{vmatrix} \bar{F}_{M1} \\ \bar{M}_{M1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{P} & \bar{T} \\ -\bar{T} & \bar{\bar{I}}_I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\tau}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{vmatrix} = \bar{M} \begin{vmatrix} \ddot{\tau}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{vmatrix}$$

Les matrices \bar{P} et $\bar{\bar{I}}_I$ sont des matrices symétriques, la matrice \bar{T} est antisymétrique.

Chapitre 2 : RESOLUTION DU PROBLEME DE DIFFRACTION - RADIATION PAR UNE METHODE DE SINGULARITES

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons exposer la théorie permettant de résoudre les problèmes hydrodynamiques de diffraction-radiation par une méthode de singularités.

Après avoir posé les différents problèmes hydrodynamiques, nous construirons les fonctions de Green en profondeur finie uniforme, puis en profondeur infinie et nous déterminerons leurs comportements asymptotiques. Il est alors possible d'établir les équations intégrales dont les solutions sont les densités de singularités cherchées. Celles-ci permettent de calculer les potentiels et les vitesses dans le domaine fluide. Le comportement à l'infini des potentiels permet de vérifier la validité des hypothèses émises lors de l'établissement des expressions des fonctions de Green. On peut ensuite poser les différents problèmes élémentaires : les problèmes de radiation, qui conduisent à la notion de masses ajoutées et d'amortissement dont on démontre certaines propriétés, et le problème de diffraction où l'on met en évidence les forces d'excitation dues à la houle incidente. Ce dernier problème est lié aux problèmes de radiation par les relations d'Haskind qui donnent une expression des forces de diffraction à partir de la solution des problèmes de radiation.

Une fois ces problèmes résolus, les équations de la mécanique nous permettent de déterminer les mouvements des corps, ainsi que certaines grandeurs telles que les forces d'ancrage ou de liaison entre différents sous-ensembles. L'ensemble des efforts constants du second ordre, appelés efforts de dérive, peut être obtenu sur chaque corps à partir de l'intégration directe des pressions au second ordre. Certains efforts résultants du second ordre sont donnés par les relations de Maruo-Newman établies à partir de l'application du théorème des quantités de mouvement. En plus de la vérification numérique des résultats, ces relations permettent de démontrer que les forces de dérive sont dirigées dans le sens de propagation de la houle incidente.

2.1. POSITION DES PROBLEMES HYDRODYNAMIQUES AU PREMIER ORDRE POUR UN ENSEMBLE DE CORPS:

Dans ce qui suit, nous allons poser le problème hydrodynamique au premier ordre pour un ensemble de N corps oscillant indépendamment et sollicités par une houle monochromatique unidirectionnelle.

Tous les développements étant effectués au premier ordre, nous omettrons l'indice 1 dans l'écriture des formules.

Chaque carène pouvant osciller indépendamment, nous noterons \vec{V}_{Ei} la vitesse d'un point quelconque de la carène i .

A partir des équations (1.34), on peut donc écrire :

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans } D \quad \text{Equation de continuité} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = \vec{V}_{E_i} \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_i} & i=1, \dots, N \quad \text{Condition de glissement écrite} \\ & \text{sur la position des corps au repos.} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 & \text{Condition de glissement sur le fond} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\varepsilon' \frac{\partial\phi}{\partial t} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = E \phi \Big|_{z=0} & \text{Condition de surface libre écrite sur le plan } z=0 \\ \phi \rightarrow \phi_I & \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

avec :

$$(2.2) \quad \phi_I = - \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} \cos [m_0(x \cos\beta + y \sin\beta) - \omega t]$$

m_0 étant solution de $\omega^2 = g m_0 \text{th } m_0 h$

et ϕ_I étant le potentiel de la houle incidente vérifiant :

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_I = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi_I}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ E \phi_I \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

on peut poser :

$$(2.4) \quad \phi_I = \phi_I^* \cos \omega t + \phi_I^{**} \sin \omega t$$

avec :

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \phi_I^* = - \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} \cos [m_0(x \cos\beta + y \sin\beta)] \\ \phi_I^{**} = - \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} \sin [m_0(x \cos\beta + y \sin\beta)] \end{array} \right.$$

Le potentiel ϕ se décompose en :

$$(2.6) \quad \phi = \phi_I + \phi_p$$

où ϕ_p est un potentiel de perturbation.

L'excitation due à la houle étant harmonique, et les équations linéaires, la réponse en régime établi est harmonique :

$$(2.7) \quad \phi = \phi^* \cos \omega t + \phi^{**} \sin \omega t$$

L'expression $E\phi$ peut donc être écrite sous les trois formes suivantes :

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\varepsilon' \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\omega^2 \phi + 2\varepsilon' \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(-k_0 \phi + \frac{2\varepsilon'}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) g \quad \text{avec } k_0 = \frac{\omega^2}{g}$$

on a donc :

$$(2.9) \quad \phi_p = \phi_p^* \cos \omega t + \phi_p^{**} \sin \omega t$$

et

$$(2.10) \quad \vec{V}_{E_i} = \vec{V}_{E_i}^* \cos \omega t + \vec{V}_{E_i}^{**} \sin \omega t$$

Les conditions à satisfaire pour le potentiel de perturbation ϕ_p s'écrivent :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_p = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = (\vec{V}_{E_i}^* \cos \omega t + \vec{V}_{E_i}^{**} \sin \omega t) \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_i} - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} \quad i=1, \dots, N \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_p \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi_p \rightarrow 0 \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

En séparant les termes intervenant dans la condition de glissement, on peut poser :

$$(2.12) \quad \phi_p = \phi_D + \sum_{i=1}^N \phi_{R_i}$$

où ϕ_D est le potentiel solution du problème suivant :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_D = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi_D}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = - \frac{\partial\phi_I}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} \quad i=1,\dots,N \\ \frac{\partial\phi_D}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_D \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi_D \rightarrow 0 \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

Les efforts de diffraction sont obtenus à partir de la pression sur le corps :

$$p_D = -\rho \frac{\partial\phi_D}{\partial t}$$

à laquelle il faut ajouter, pour obtenir l'ensemble des efforts dus à la houle, le terme $-\rho \frac{\partial\phi_I}{\partial t}$:

$$(2.14) \quad p = -\rho \left(\frac{\partial\phi_D}{\partial t} + \frac{\partial\phi_I}{\partial t} \right)$$

et le potentiel ϕ_{Ri} solution de :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_{Ri} = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi_{Ri}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = (\vec{V}_{E_i} \cos \omega t + \vec{V}_{E_i}^{**} \sin \omega t) \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_i} \\ \frac{\partial\phi_{Ri}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = 0 \quad \text{pour } j \neq i \\ \frac{\partial\phi_{Ri}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_{Ri} \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi_{Ri} \rightarrow 0 \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

Avec cette décomposition, on voit que le problème complet est, au premier ordre, la somme de $N+1$ problèmes élémentaires, le potentiel ϕ_D correspondant à la solution du problème de diffraction de la houle incidente par des corps fixes, chacun des N potentiels ϕ_{Ri} étant la solution d'un problème de radiation correspondant à

une vitesse imposée du corps i :

$$\vec{V}_{E_i} = \vec{V}_{E_i}^* \cos \omega t + \vec{V}_{E_i}^{**} \sin \omega t$$

en eau initialement calme, les autres corps étant maintenus fixes.

Les inconnues du problème sont les amplitudes (en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$) des mouvements des corps à partir desquels on peut connaître les vitesses. Comme les mouvements des corps ne sont pas connus a priori, on décomposera chacun des potentiels ϕ_{R_i} en 12 problèmes élémentaires (3 translations et 3 rotations en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$) pour lesquels on choisira une vitesse unitaire. Ces 12 problèmes se réduisent d'ailleurs à 6 si l'on impose la phase de l'excitation comme on le montrera au paragraphe 2.6. le nombre total de problèmes à résoudre est donc de $6N+1$.

Chaque problème de radiation élémentaire est défini par :

$$(2.16) \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_{R_i}^q = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = \vec{V}_{E_i}^q \cdot \vec{n} \cos \omega t \Big|_{\Sigma_i} \quad \text{avec } |\vec{V}_{E_i}^q| = 1, \quad \vec{V}_{E_i}^{q**} = 0 \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = 0 \quad \text{pour } j \neq i \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_{R_i}^q \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi_{R_i}^q \rightarrow 0 \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

Les efforts élémentaires sur le corps sont obtenus à partir de la formule de Lagrange linéarisée :

$$(2.17) \quad p = -\rho \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial t}$$

2.2. RESOLUTION DU PROBLEME PAR UNE METHODE DE SINGULARITES , FONCTIONS DE GREEN :

Pour chacun des problèmes posés, les conditions de glissement sont affichées sur des limitantes fixes correspondant à la position de repos des corps. Ces problèmes

peuvent être résolus à l'aide de la méthode des singularités décrite dans l'annexe 2.

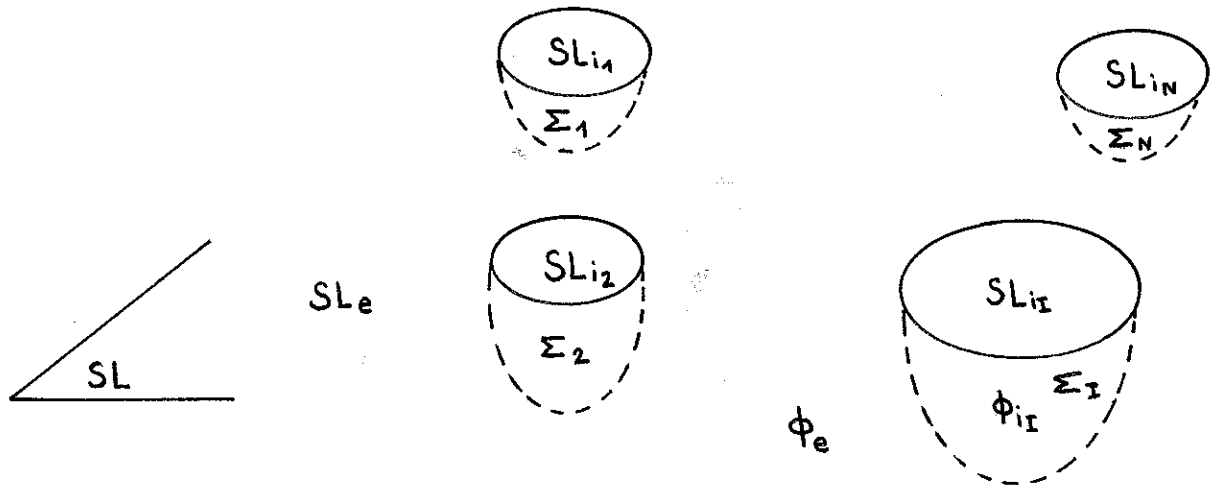


Figure 2.1

Pour des singularités fixes fonction du temps et des carènes coupant la surface libre, la troisième formule de Green s'écrit à chaque instant :

$$(2.18) \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \phi_e(M,t) \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e(M,t) + \phi_i(M,t)}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i(M,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n_{M'}} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_{M'}} \right) \mathcal{G}(M, M', t) dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\phi_e - \phi_i)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}(M, M', t) dS(M') + I_L \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \dots \cup \Sigma_N \end{array} \right.$$

$$I_L = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_e} \left[\frac{\partial \phi_e}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M', t) - \phi_e \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M', t) \right] dS(M') + \\ \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_{ij}} \left[\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M', t) - \phi_{ij} \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M', t) \right] dS(M') \end{array} \right.$$

Les indices e se rapportant au domaine extérieur et ij au domaine intérieur de la carène j.

Compte tenu de la condition de surface libre du problème (2.8) :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z'} = k_0 \phi_e, \quad \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial z'} = k_0 \phi_{ij}, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z'} = k_0 \mathcal{G} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g},$$

le terme en I_L donne une contribution nulle. La troisième formule de Green et les équations intégrales seront donc les mêmes que pour des carènes immergées.

Le potentiel ϕ est de la forme :

$$(2.19.a) \quad \phi(M,t) = \phi^* \cos \omega t + \phi^{**} \sin \omega t$$

On peut donc écrire :

- Pour les potentiels en $\cos \omega t$:

$$(2.19.b) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \phi_e^* \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e^* + \phi_i^*}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i^* \end{array} \right\} \cos \omega t = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right)_{M'} \left[\frac{\cos \omega t}{MM'} + g_c(M, M', t) \right] dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\phi_e^* - \phi_i^*)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[\frac{\cos \omega t}{MM'} + g_c(M, M', t) \right] dS(M') \end{array} \right.$$

- Pour les potentiels en $\sin \omega t$:

$$(2.19.c) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \phi_e^{**} \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e^{**} + \phi_i^{**}}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i^{**} \end{array} \right\} \sin \omega t = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^{**}}{\partial n} \right)_{M'} \left[\frac{\sin \omega t}{MM'} + g_s(M, M', t) \right] dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\phi_e^{**} - \phi_i^{**})_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[\frac{\sin \omega t}{MM'} + g_s(M, M', t) \right] dS(M') \end{array} \right.$$

- Les fonctions de Green :

$$(2.20) \quad \mathcal{G}_c(M, M', t) = \frac{\cos \omega t}{MM'} + g_c(M, M', t)$$

$$(2.21) \quad \mathcal{G}_s(M, M', t) = \frac{\sin \omega t}{MM'} + g_s(M, M', t)$$

devant vérifier :

$$(2.22) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } E \mathcal{G}_c |_{z=0} = 0 \qquad E \mathcal{G}_s |_{z=0} = 0 \qquad \forall M \in SL \text{ et } M' \in \Sigma \\ \text{b) } \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial z} |_{z=h} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial z} |_{z=h} = 0 \\ \text{c) } \Delta_{M'} \mathcal{G}_c = 0 \qquad \Delta_{M'} \mathcal{G}_s = 0 \\ \text{d) } \iint_{\Sigma_\infty} \left[\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_c (M, M', t) - \phi_e^* (M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_c (M, M', t) + \frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_s (M, M', t) - \right. \\ \left. \phi_e^{**} (M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_s (M, M', t) \right] dS (M') = 0 \end{array} \right.$$

où Σ_∞ est une surface fermant le domaine à l'infini

2.2.1. Détermination de la fonction de Green $\mathcal{G}_c (M, M', t)$ en profondeur finie uniforme :

Pour déterminer la fonction de Green en profondeur finie, nous appliquerons les résultats du paragraphe X de l'annexe 2 avec une singularité fixe en $\cos \omega t$.

L'application des formules (A2.91) donne dans ce cas :

$$(2.23) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_c (M, M', t) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ \phi_1 = \cos \omega t \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_0} \right) \qquad M'(x', y', z') \quad , \quad M'_0(x', y', -z'-2h) \\ \phi_2 = \frac{-2 \cos \omega t}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty (1 - th kh) \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\bar{\omega}} dk \\ \bar{\omega} = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta \\ \phi_3 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty k dk \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) \end{array} \right.$$

$$\hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) = \frac{-ig}{\operatorname{ch} kh \sqrt{gk \operatorname{th} kh}} \int_{t_0}^t \cos \omega \tau \operatorname{ch} k(z+h) e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} [e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)}] d\tau$$

avec : $s_1 = -\varepsilon' + i \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$
 $s_2 = -\varepsilon' - i \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$

On met donc ϕ_3 sous la forme :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty k dk \frac{\operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h)}{\operatorname{ch}^2 kh} e^{ik\bar{\omega}} a(t) \\ a(t) &= \frac{-ig}{\sqrt{gk \operatorname{th} kh}} \int_{t_0}^t \left(\frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} \right) [e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)}] d\tau \end{aligned} \right.$$

Posons :

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \int_{t_0}^t e^{i\omega\tau + s_1(t-\tau)} d\tau & I_2 &= - \int_{t_0}^t e^{i\omega\tau + s_2(t-\tau)} d\tau \\ I_3 &= \int_{t_0}^t e^{-i\omega\tau + s_1(t-\tau)} d\tau & I_4 &= - \int_{t_0}^t e^{-i\omega\tau + s_2(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on s'intéresse à la solution en régime établi, on fait tendre t_0 vers $-\infty$.

On a alors :

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - s_1} & I_2 &= \frac{-e^{i\omega t}}{i\omega - s_2} \\ I_3 &= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega - s_1} & I_4 &= \frac{-e^{-i\omega t}}{-i\omega - s_2} \end{aligned} \right.$$

$$I_1 + I_2 = e^{i\omega t} \frac{s_1 - s_2}{2(-\omega - i\omega(s_1 + s_2) + s_1 s_2)}$$

$$I_3 + I_4 = e^{-i\omega t} \frac{s_1 - s_2}{2(-\omega + i\omega(s_1 + s_2) + s_1 s_2)}$$

soit, compte tenu de :

$$(2.27) \quad \begin{cases} s_1 - s_2 = 2i \sqrt{gk th kh} \\ s_1 + s_2 = -2\varepsilon' \\ s_1 s_2 = gk th kh \end{cases}$$

et en posant :

$$k_0 = \frac{\omega^2}{g}$$

$$(2.28) \quad a(t) = \frac{e^{i\omega t}}{-k_0 + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} + k th kh} + \frac{e^{-i\omega t}}{-k_0 - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} + k th kh}$$

En regroupant ϕ_2 et ϕ_3 , on obtient :

$$(2.29) \quad \phi = \phi_2 + \phi_3 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} (a' + b')$$

avec :

$$a' = e^{i\omega t} \left[\frac{k}{\operatorname{ch}^2 kh} \frac{1}{-k_0 + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} + k th kh} - (1 - th kh) \right]$$

$$b' = e^{-i\omega t} \left[\frac{k}{\operatorname{ch}^2 kh} \frac{1}{-k_0 - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} + k th kh} - (1 - th kh) \right]$$

en réduisant au même dénominateur et en tenant compte de l'identité :

$$\operatorname{ch} kh - \operatorname{sh} kh = e^{-kh}$$

a' et b' s'écrivent :

$$(2.30) \quad \begin{cases} a' = e^{i\omega t} e^{-kh} (k + k_0 - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}) \frac{1}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} \operatorname{ch} kh} \\ b' = e^{-i\omega t} e^{-kh} (k + k_0 + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}) \frac{1}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g} \operatorname{ch} kh} \end{cases}$$

La fonction de Green $\mathcal{G}_c(M, M', t)$ se met alors sous la forme :

$$(2.31) \quad \mathcal{G}_c(M, M', t) = \phi_1 + \phi$$

avec :

$$(2.32) \quad \phi_1(x, y, z, t) = \cos \omega t \left(\frac{1}{MM} + \frac{1}{MM_0} \right)$$

et

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) [k+k_0 - 2i \varepsilon' \frac{\omega}{g}] e^{ik\varpi}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh + 2i \varepsilon' \frac{\omega}{g} \operatorname{ch} kh} \\ &+ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) [k+k_0 + 2i \varepsilon' \frac{\omega}{g}] e^{ik\varpi}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh - 2i \varepsilon' \frac{\omega}{g} \operatorname{ch} kh} \end{aligned} \right.$$

Il faut remarquer que les deux intégrales diffèrent par le signe de la partie imaginaire du pôle, le rôle du terme dissipatif ε' de la condition de surface libre des fluides presque parfaits est donc de préciser la position des pôles dans le plan complexe.

La valeur des intégrales, calculées par la méthode des résidus, ne dépendant que des pôles, on peut négliger les termes en ε' situés au numérateur des intégrands.

Posons : $i(0) = (2\varepsilon'\omega/g) \operatorname{ch} kh$ un infiniment petit positif, et :

$$(2.34) \quad I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) (k+k_0) e^{ik\varpi}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh + i(0)}$$

$$(2.35) \quad I_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) (k+k_0) e^{ik\varpi}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh - i(0)}$$

Sous cette forme, il est difficile d'expliquer ces intégrales, le pôle de la fonction à intégrer dépendant de k par une équation implicite.

Nous allons modifier la forme de l'intégrand suivant la méthode développée par P. Guével [50], utilisant la technique de lissage des fonctions par des séries d'exponentielles due à J.C. Daubisse [15][16][17].

L'intégrand des intégrales I_1 et I_2 peut se mettre sous la forme :

$$(2.36) \quad \frac{(k + k_0) e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\bar{w}}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh \pm i(0)} = F(k) e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\bar{w}}$$

$$(2.37) \quad F(k) = \frac{(k + k_0) e^{kh}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh \pm i(0)} = \frac{N}{D}$$

Le dénominateur de $F(k)$ s'annule pour la valeur de k racine de $g k \operatorname{th} kh = \omega^2$, c'est-à-dire pour $k = m_0$ où m_0 est le nombre d'onde de la houle incidente solution de : $\omega^2 = g m_0 \operatorname{th} m_0 h$.

Pour cette valeur $k = m_0$, la dérivée du dénominateur est :

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{aligned} D' &= \frac{d}{dk} [k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh] \Big|_{k=m_0} = [\operatorname{sh} kh + kh \operatorname{ch} kh - k_0 \operatorname{sh} kh] \Big|_{k=m_0} \\ &= [k_0 h + (m_0 h)^2 - (k_0 h)^2] \frac{\operatorname{ch} m_0 h}{m_0 h} > 0 \quad \text{car } m_0 \geq k_0 \end{aligned} \right.$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle, le pôle est donc simple.

La valeur du résidu en m_0 est :

$$A = \frac{N(m_0)}{D'(m_0)} = \frac{m_0 h (m_0 + k_0) e^{m_0 h}}{[k_0 h + (m_0 h)^2 - (k_0 h)^2] \operatorname{ch} m_0 h} = \frac{m_0 h (m_0 + k_0)}{[k_0 h + (m_0 h)^2 - (k_0 h)^2]} (1 + \operatorname{th} m_0 h)$$

soit :

$$(2.39) \quad A = \frac{1}{h} \frac{(m_0 h + k_0 h)^2}{[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]}$$

On peut alors construire une fonction sans pôle $F_1(k)$ telle que :

$$(2.40) \quad F(k) = F_1(k) + \frac{A}{k - [m_0 \mp i(0)]}$$

Pour $k \rightarrow \infty$, la fonction $F_1(k) \rightarrow 2$; ce qui justifie la décomposition utilisée dans la formule (2.36).

L'intégration analytique en k des intégrales I_1 et I_2 peut être effectuée si la fonction $F_1(k)$ se présente sous une forme simple. Si, par exemple, on choisit de représenter $F_1(k)$ par un développement en série d'exponentielles, l'intégration est

immédiate. Le terme contenant le pôle est une intégrale du type $I(K_0, Z)$ qui s'intègre analytiquement d'après les formules données dans l'annexe 3 :

$$(2.41) \quad F_1(k) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n kh} = 2 + \bar{F}_1(k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n kh} \quad \text{avec } a_0=2 \text{ et } \lambda_0=0$$

Explicitons le deuxième terme de la formule (2.36) :

$$(2.42) \quad e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} = \frac{1}{4} [e^{k\xi_1} + e^{k\xi_2} + e^{k\xi_3} + e^{k\xi_4}]$$

avec :

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = z + z' + i\varpi \\ \xi_2 = z' - z - 2h + i\varpi \\ \xi_3 = z - z' - 2h + i\varpi \\ \xi_4 = -(z + z' + 4h) + i\varpi \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on écrit $\phi(x,y,z,t)$ sous la forme :

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi} \cos \omega t \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} a_n [e^{k(\lambda_n h + \xi_1)} + e^{k(\lambda_n h + \xi_2)} + e^{k(\lambda_n h + \xi_3)} + e^{k(\lambda_n h + \xi_4)}] dk \\ + \frac{A}{4\pi} \operatorname{Re} e^{+i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{(e^{k\xi_1} + e^{k\xi_2} + e^{k\xi_3} + e^{k\xi_4})}{k - [m_0 - i(0)]} dk \\ + \frac{A}{4\pi} \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{(e^{k\xi_1} + e^{k\xi_2} + e^{k\xi_3} + e^{k\xi_4})}{k - [m_0 + i(0)]} dk \end{array} \right.$$

et en utilisant les résultats de l'annexe 3, il vient :

$$(2.45) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{\xi_i k} dk}{k - [m_0 - i(0)]} = \begin{cases} e^{\xi_i m_0} E_1(\xi_i m_0) & \operatorname{Im}(\xi_i m_0) \geq 0 \\ e^{\xi_i m_0} [E_1(\xi_i m_0) - 2i\pi] & \operatorname{Im}(\xi_i m_0) < 0 \end{cases}$$

$$(2.46) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{\xi_i k} dk}{k - [m_0 + i(0)]} = \begin{cases} e^{\xi_i m_0} [E_1(\xi_i m_0) + 2i\pi] & \text{Im}(\xi_i m_0) \geq 0 \\ e^{\xi_i m_0} E_1(\xi_i m_0) & \text{Im}(\xi_i m_0) < 0 \end{cases}$$

En introduisant la fonction $J(Z)$ définie par (A3.16), on peut regrouper les termes en $e^{i\omega t}$ et en $e^{-i\omega t}$, il vient alors :

$$(2.47) \quad \phi(x,y,z,t) = -\frac{1}{2\pi} \cos \omega t \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n h + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_4} \right) d\theta$$

$$+ \frac{A \cos \omega t}{2\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [J(m_0 \xi_1) + J(m_0 \xi_2) + J(m_0 \xi_3) + J(m_0 \xi_4)] d\theta$$

$$+ \frac{A \sin \omega t}{2\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [e^{m_0 \xi_1} + e^{m_0 \xi_2} + e^{m_0 \xi_3} + e^{m_0 \xi_4}] d\theta$$

d'où l'expression finale de la fonction $\mathcal{U}_c(M, M', t)$:

$$(2.48) \quad \mathcal{U}_c(M, M', t) = S^* \cos \omega t + S^{**} \sin \omega t$$

avec :

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad S^* = S_0^* + S_1^* + S_2^* + S_3^* \\ \text{(b)} \quad S_0^* = \frac{1}{MM'} \quad , \quad S_1^* = \frac{1}{MM_0} \\ \text{(c)} \quad S_2^* = \frac{A}{2\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [J(\zeta_1) + J(\zeta_2) + J(\zeta_3) + J(\zeta_4)] \\ \text{(d)} \quad S_3^* = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n h + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_4} \right) d\theta \\ \text{(e)} \quad S^{**} = \frac{A}{2} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + e^{\zeta_3} + e^{\zeta_4}] d\theta \end{array} \right.$$

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = m_0 \xi_1 = m_0 (z+z'+i \varpi) \\ \zeta_2 = m_0 \xi_2 = m_0 (z'-z-2h+i \varpi) \\ \zeta_3 = m_0 \xi_3 = m_0 (z-z'-2h+i \varpi) \\ \zeta_4 = m_0 \xi_4 = m_0 [-(z+z'+4h)+i \varpi] \\ k_0 = \frac{\omega^2}{g} = m_0 \operatorname{th} m_0 h \\ \varpi = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta \end{array} \right.$$

Les formules (2.49.d) donnant S_3^* peuvent être écrites sous une forme plus simple si l'on impose certaines contraintes au développement de la fonction $F_1(k)$ en série d'exponentielles.

En effet, dans le domaine fluide, on a :

$$-h \leq z < 0$$

$$-h \leq z' < 0$$

ce qui entraîne :

$$-2h \leq z+z' < 0$$

$$-3h \leq z'-z-2h < -h$$

$$-3h \leq z-z'-2h < -h$$

$$-4h \leq -z-z'-4h < -2h$$

Si le développement de la fonction $F_1(k)$ est effectué à l'aide d'exponentielles réelles négatives ou nulles ($\lambda_n \leq 0$), la partie réelle du dénominateur des fractions de l'expression (2.49.d) est négative, et l'on peut effectuer l'intégration analytiquement compte tenu des formules (A2.30) et (A2.32) écrites sous la forme :

$$\frac{1}{M_{in} M^r} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(z_{in} - z') + i \varpi} \quad \text{pour } (z_{in} - z') < 0$$

$$\frac{1}{M_{in}M'} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(z' - z_{in}) + i\varpi} \quad \text{pour } (z' - z_{in}) < 0$$

En appliquant alternativement ces deux identités pour des points $M_{1n}, M_{2n}, M_{3n}, M_{4n}$ définis par :

$$M_{1n} (x, y, -z - \lambda_n h)$$

$$M_{2n} (x, y, z + 2h - \lambda_n h)$$

$$M_{3n} (x, y, z - 2h + \lambda_n h)$$

$$M_{4n} (x, y, -z - 4h + \lambda_n h)$$

La formule (2.49.d) s'écrit sous une forme plus adaptée au calcul numérique :

$$(2.49.d') \quad S'_3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{M_{1n}M'} + \frac{1}{M_{2n}M'} + \frac{1}{M_{3n}M'} + \frac{1}{M_{4n}M'} \right)$$

La comparaison de ces deux formulations sera effectuée au chapitre suivant.

2.2.2. Détermination de la fonction de Green $\mathcal{G}_s(M, M', t)$ en profondeur finie uniforme :

Un calcul analogue effectué avec la fonction $\mathcal{G}_s(M, M', t)$ donne :

$$(2.50) \quad \mathcal{G}_s(M, M', t) = S^* \sin \omega t - S^{**} \cos \omega t$$

On peut remarquer que ce résultat revient à effectuer les permutations suivantes dans la formule précédente :

$$\mathcal{G}_c \rightarrow \mathcal{G}_s ; S^* \rightarrow S^{**} ; \omega t \rightarrow \omega t - \pi/2$$

Cette remarque n'est qu'un moyen mnémotechnique et ne constitue pas une démonstration.



Si l'on utilise l'égalité :

$$(2.56) \quad \frac{1}{MM'_1} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(z+z'+i\varpi)} dk = \frac{-1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{z+z'+i\varpi}$$

on peut mettre ϕ sous la forme :

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi &= \frac{2 \cos \omega t}{MM'_1} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{(k_0 - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}) e^{k(z+z'+i\varpi)}}{k - k_0 + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}} dk + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{(k_0 + 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}) e^{k(z+z'+i\varpi)}}{k - k_0 - 2i\varepsilon' \frac{\omega}{g}} dk \end{aligned} \right.$$

D'après les résultats de l'annexe 2, en posant :

$$\zeta = k_0 (z+z'+i\varpi)$$

on a :

$$(2.58) \quad \phi = \frac{2 \cos \omega t}{MM'_1} + \frac{2k_0}{\pi} \cos \omega t \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta + 2k_0 \sin \omega t \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta$$

qui peut s'écrire aussi compte tenu de (2.56) :

$$(2.59) \quad \phi = \frac{2k_0}{\pi} \cos \omega t \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right] d\theta + 2k_0 \sin \omega t \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta$$

d'où l'expression finale de la fonction de Green :

$$(2.60) \quad \mathcal{G}_c(M, M', t) = S^* \cos \omega t + S^{**} \sin \omega t$$

avec :

$$(2.61) \quad S^* = \frac{1}{MM} + \frac{1}{MM'_1} + \frac{2k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta$$

ou bien :

$$(2.62) \quad S^* = \frac{1}{MM_1} - \frac{1}{MM_1} + \frac{2k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dJ(\zeta)}{d\zeta} d\theta$$

et

$$(2.63) \quad S^{**} = 2k_0 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta$$

Comme en profondeur finie, le calcul donne pour $\mathcal{G}_s(M, M', t)$:

$$(2.64) \quad \mathcal{G}_s(M, M', t) = S^* \sin \omega t - S^{**} \cos \omega t$$

On peut remarquer que lorsque l'on fait tendre h vers l'infini dans les formules (2.49) :

$$m_0 \rightarrow k_0, \quad A \rightarrow 4k_0, \quad \zeta_1 \rightarrow \zeta, \quad \zeta_2 \rightarrow 0, \quad \zeta_3 \rightarrow 0, \quad \zeta_4 \rightarrow 0$$

d'où :

$$S_1^* \rightarrow 0$$

$$S_2^* \rightarrow \frac{2k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta$$

$$S_3^* \rightarrow \frac{1}{MM_1}$$

$$S^{**} \rightarrow 2k_0 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta$$

On retrouve bien la formule précédemment établie.

Les formules en profondeur finie contiennent 4 fonctions de ζ à intégrer numériquement, les calculs seront donc 4 fois plus nombreux qu'en profondeur infinie, ce qui justifie le fait d'avoir deux formulations distinctes.

2.2.4. Comportement asymptotique des fonctions de Green en fonction de la période :

En profondeur infinie, les expressions précédentes se simplifient aisément et l'on obtient les comportements asymptotiques.

1) Période tendant vers 0 :

Lorsqu'on fait tendre la période vers zéro, on a :

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} \frac{2k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k_0}{\zeta} d\theta = \frac{-2}{MM_1}$$

de même, à partir de (2.63) :

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} k_0 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta = 0 \quad \text{si } z + z' \neq 0$$

on a donc :

$$(2.65) \quad \begin{cases} S^* \rightarrow \frac{1}{MM_1} - \frac{1}{MM_1} \\ S^{**} \rightarrow 0 \end{cases}$$

On retrouve ainsi les résultats que l'on aurait obtenu par un calcul direct avec la condition de surface libre valable pour $T \rightarrow 0$:

$$-4\pi^2 \phi + g T^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{soit } \phi \Big|_{z=0} = 0$$

dont la solution est immédiate par la méthode des images et prenant la singularité de signe opposé située symétriquement par rapport à la surface libre.

2) Période tendant vers l'infini :

Lorsque la période tend vers l'infini, on obtient une autre simplification. On a alors :

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta \sim \frac{k_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{Log} \zeta d\theta \rightarrow 0$$

de même pour (2.63) :

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} k_0 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta \rightarrow 0$$

on obtient donc :

$$(2.66) \quad \begin{cases} S^* \rightarrow \frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM_1'} \\ S^{**} \rightarrow 0 \end{cases}$$

On retrouve les résultats de la condition de surface libre du double modèle :

$$\frac{-4\pi^2}{T^2} \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

dont la solution par la méthode des images est le symétrique par rapport à la surface libre de la singularité initiale.

3) Profondeur finie :

En profondeur finie, la formulation n'est pas facilement développable du fait du lissage de la fonction par des séries d'exponentielles. Un calcul direct donne des séries d'images symétriques par rapport au fond et symétrique ou antisymétrique par rapport à la surface libre suivant le cas (période infinie ou période nulle respectivement).

2.3. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS INTEGRALES, POTENTIELS, VITESSES, NOTATION COMPLEXE, FREQUENCES IRREGULIERES

- Equations intégrales en fonction du temps :

Les fonctions de Green ont été obtenues sous la forme :

$$(2.67) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_c(M, M', t) = S^* \cos \omega t + S^{**} \sin \omega t \\ \mathcal{G}_s(M, M', t) = S^* \sin \omega t - S^{**} \cos \omega t \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans les formules (2.18) et (2.19), puis en recomposant le potentiel à chaque instant, et enfin en séparant les contributions en $\sin \omega t$ et en $\cos \omega t$, on obtient :

$$(2.68) \quad \left. \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \phi_e^* \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e^* + \phi_i^*}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i^* \end{array} \right\} \cos \omega t = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right)_{M'} S^* - \left(\frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^{**}}{\partial n} \right)_{M'} S^{**} \right] dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\phi_e^* - \phi_i^*)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^* - \\ (\phi_e^{**} - \phi_i^{**})_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^{**}] dS(M') \end{array} \right\} \cos \omega t$$

$$(2.69) \quad \left. \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \phi_e^{**} \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e^{**} + \phi_i^{**}}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i^{**} \end{array} \right\} \sin \omega t = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^{**}}{\partial n} \right)_{M'} S^* + \left(\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right)_{M'} S^{**} \right] dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[(\phi_e^{**} - \phi_i^{**})_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^* + \right. \\ \left. (\phi_e^* - \phi_i^*)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^{**} \right] dS(M') \right\} \sin \omega t$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \dots \cup \Sigma_N$$

Si l'on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma^* \cos \omega t + \sigma^{**} \sin \omega t \quad ; \quad \mu = \mu^* \cos \omega t + \mu^{**} \sin \omega t \\ D^* = \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^* \quad ; \quad D^{**} = \frac{\partial}{\partial n_{M'}} S^{**} \quad ; \quad K^* = \frac{\partial}{\partial n_M} S^* \quad ; \quad K^{**} = \frac{\partial}{\partial n_M} S^{**} \end{array} \right.$$

Les équations intégrales permettant de calculer les distributions de singularités s'écrivent, d'après les résultats du paragraphe 2.2 :

- pour une distribution de sources seules :

$$(2.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma^*(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma^*(M') K^*(M, M') - \sigma^{**}(M') K^{**}(M, M')] dS(M') = \frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} |_M \\ \frac{\sigma^{**}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma^*(M') K^{**}(M, M') + \sigma^{**}(M') K^*(M, M')] dS(M') = \frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} |_M \end{array} \right.$$

- pour une distribution mixte de Green :

$$(2.71) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu^*(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\mu^*(M') D^*(M, M') - \mu^{**}(M') D^{**}(M, M')] dS(M') = \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} |_{M'} S^*(M, M') - \frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} |_{M'} S^{**}(M, M') \right] dS(M') \\ \frac{\mu^{**}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\mu^*(M') D^{**}(M, M') + \mu^{**}(M') D^*(M, M')] dS(M') = \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} |_{M'} S^{**}(M, M') + \frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n} |_{M'} S^*(M, M') \right] dS(M') \end{array} \right.$$

- Potentiels :

Une fois résolues les équations intégrales, les potentiels sur les corps dans le domaine fluide sont donnés :

- pour une distribution de sources :

$$(2.72) \left\{ \begin{array}{l} \phi^*(M) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma^*(M') S^*(M, M') - \sigma^{**}(M') S^{**}(M, M')] dS(M') \\ \phi^{**}(M) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma^{**}(M') S^*(M, M') + \sigma^*(M') S^{**}(M, M')] dS(M') \end{array} \right.$$

- pour une distribution mixte de Green :

Le potentiel est déterminé sans nouveau calcul à partir de la solution des équations intégrales par :

$$\mu(M) = -\phi_e(M)$$

d'où :

$$(2.73) \left\{ \begin{array}{l} \phi^*(M) = -\mu^*(M) \\ \phi^{**}(M) = -\mu^{**}(M) \end{array} \right.$$

- Vitesses :

Les vitesses sur les corps dans le domaine fluide s'obtiennent :

- de manière directe pour les sources en utilisant le principe qui a permis d'obtenir les équations intégrales, les coefficients S^* et S^{**} étant calculés pour $M \in \Sigma$:

$$(2.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{E \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}}^* (M) = \frac{p}{r} \left[\frac{\sigma^*(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\sigma^*(M') \frac{\partial S^*}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} - \sigma^{**}(M') \frac{\partial S^{**}}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} \right] dS(M') \right. \\ \\ V_{E \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}}^{**} (M) = \frac{p}{r} \left[\frac{\sigma^{**}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\sigma^*(M') \frac{\partial S^{**}}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} + \sigma^{**}(M') \frac{\partial S^*}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} \right] dS(M') \right. \end{array} \right.$$

- en dérivant les formules (2.68) et (2.69) par rapport à M pour $M \in \tau_e$, les coefficients D^* et D^{**} étant eux-mêmes calculés pour $M \in \tau_e$:

$$(2.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{E \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}}^* (M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\mu^*(M') \frac{\partial D^*}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} - \mu^{**}(M') \frac{\partial D^{**}}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} \right] dS(M') \\ \\ V_{E \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}}^{**} (M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\mu^*(M') \frac{\partial D^{**}}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} + \mu^{**}(M') \frac{\partial D^*}{\partial \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}} \right] dS(M') \end{array} \right.$$

Les dérivées des coefficients D^* et D^{**} continues par rapport à M pour $M \in \Sigma$ auraient pu être obtenues par dérivation sur la surface pour $M \in \Sigma$. Le fait de calculer dans le domaine extérieur permet d'obtenir une formulation générale pour les vitesses.

- Utilisation de la notation complexe :

Pour toute grandeur variant sinusoïdalement en fonction du temps, on peut utiliser la notation complexe :

$$A = A^* \cos \omega t + A^{**} \sin \omega t = \text{Re} (\tilde{A} e^{-i\omega t}) \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = A^* + i A^{**}$$

où les grandeurs surmontées d'un \sim seront les grandeurs complexes associées à la grandeur variant sinusoïdalement.

Si :

$$\tilde{A} = A^* + i A^{**} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = B^* + i B^{**}$$

on a :

$$\begin{cases} \text{Re} (\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = A^* B^* - A^{**} B^{**} & , \quad \text{Re} \text{ désignant la partie réelle} \\ \text{Im} (\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = A^* B^{**} + A^{**} B^* & , \quad \text{Im} \text{ désignant la partie réelle} \end{cases}$$

Avec cette notation, les équations intégrales s'écrivent :

- Pour une distribution de sources seules :

$$(2.77) \quad \frac{\tilde{\sigma}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\sigma}(M') \tilde{K}(M, M') dS(M') = \frac{\partial \phi_e}{\partial n} \Big|_M$$

- Pour une distribution mixte de Green :

$$(2.78) \quad \frac{\tilde{\mu}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\mu}(M') \tilde{D}(M, M') dS(M') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \phi_e}{\partial n} \Big|_{M'} \tilde{S}(M, M') dS(M')$$

La valeur moyenne de deux grandeurs complexes variant sinusoidalement s'écrit :

$$\langle A(t) \cdot B(t) \rangle = \langle \text{Re} (\tilde{A} e^{-i\omega t}) \cdot \text{Re} (\tilde{B} e^{-i\omega t}) \rangle$$

et comme :

$$\text{Re} (\tilde{B} e^{-i\omega t}) = \text{Re} (\bar{\tilde{B}} e^{i\omega t})$$

la barre désignant la quantité complexe conjuguée, la valeur moyenne en notation complexe se met sous la forme :

$$(2.79) \quad \langle A(t) \cdot B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\tilde{A} \bar{\tilde{B}}) = \frac{1}{2} \text{Re} (\bar{\tilde{A}} \tilde{B}) = \frac{1}{4} \text{Re} (\bar{\tilde{A}} \tilde{B} + \tilde{A} \bar{\tilde{B}})$$

La notation complexe est très agréable par sa concision, bien qu'elle ne permette pas toujours une interprétation physique immédiate des phénomènes. Son utilisation n'est pourtant pas uniquement une facilité d'écriture. En effet, au niveau de la résolution des équations intégrales, elle permet d'employer l'arithmétique complexe, ce qui diminue le nombre des calculs, comme nous le montrerons ultérieurement.

- Fréquences irrégulières :

Les équations intégrales obtenues précédemment sont des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce.

La théorie des équations intégrales nous indique que ces équations admettent en général une solution unique, sauf pour certaines valeurs discrètes de la pulsation ω pour lesquelles chacun des N problèmes intérieurs adjoints définis par :

$$(2.80) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine intérieur à une carène} \\ E\phi|_{z=0} = 0 & \text{sur la surface de flottaison de cette carène} \\ \phi|_{\Sigma} = 0 & \text{sur la surface de cette carène} \end{array} \right.$$

admet une solution non identiquement nulle.

Ces problèmes intérieurs adjoints ne correspondent pas au problème de l'excitation forcée d'un réservoir, la condition aux limites sur la carène portant sur le potentiel et non sur sa dérivée normale. En particulier, les fréquences irrégulières ne sont pas les fréquences de résonance du liquide dans les réservoirs.

Ce problème est fondamental dans le cas bidimensionnel. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes pour éliminer ces fréquences [97][75][43][105]. Le principe général des méthodes proposées consiste à imposer sur la surface de flottaison intérieure $\phi|_{z=0} = 0$ au lieu de $E\phi|_{z=0} = 0$, le problème intérieur est alors un problème de Dirichlet dont la seule solution est $\phi \equiv 0$. Le fait d'imposer $\phi = 0$ sur la surface de flottaison conduit à introduire des équations supplémentaires, le problème sera alors résolu, soit en introduisant de nouvelles inconnues, soit au sens des moindres carrés.

En tridimensionnel, les fréquences irrégulières ne sont pas aussi gênantes que dans le cas bidimensionnel, car elles se manifestent à des fréquences élevées, généralement situées en dehors du domaine d'étude, et perturbent assez peu la solution comme nous le verrons lors de l'étude numérique.

2.4. COMPORTEMENT A L'INFINI DES FONCTIONS DE GREEN ET DES POTENTIELS :

2.4.1. Comportement à l'infini d'une fonction de Green :

Si l'on se place en un point M à une distance horizontale r du point M' , on a :

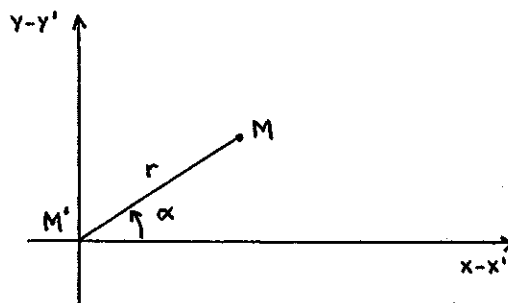


Figure 2.2

$$x - x' = r \cos \alpha \quad , \quad y - y' = r \sin \alpha$$

où $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{MM'})$ $\alpha \in]-\pi, +\pi]$

$$\overline{w} = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta = r \cos(\theta - \alpha)$$

Dans les formules (2.49) donnant S^* et S^{**} , si l'on change simultanément,

$(x - x')$ en $-(x - x')$ et θ en $-\theta$; $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont changées en $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4$.

Comme $J(\bar{Z}) = \overline{J(Z)}$, les intégrands de S^*_2, S^*_3 et S^{**} sont changés en leurs conjugués, donc les termes S^* et S^{**} qui font intervenir la partie réelle des intégrands sont inchangés. On peut donc limiter l'étude de S^* et S^{**} au demi plan $(x - x') \geq 0$, donc $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2]$.

Si l'on fait tendre r vers l'infini, les coefficients S^*_0, S^*_1 et S^*_3 tendent vers 0 comme $1/r$. Nous allons donc étudier la décroissance de S^*_2 et S^{**} .

$$S^*_2 = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{i=1}^4 J(\zeta_i) d\theta \sim \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{i=1}^4 \left[\frac{1}{\zeta_i} \pm i\pi e^{\zeta_i} \right] d\theta \quad \text{si } r \rightarrow \infty$$

d'après la formule (A3.9), le signe + ou - devant $i\pi$ dépendant de la partie imaginaire de ζ_i [+ pour $\operatorname{Im}(\zeta_i) = r \cos(\theta - \alpha) \geq 0$, - pour $\operatorname{Im}(\zeta_i) < 0$].

Le premier terme tend vers 0 comme $1/r$, nous allons donc étudier le comportement de :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{i=1}^4 \pm i\pi e^{\zeta_i} d\theta$$

ce qui permettra de traiter simultanément S^*_2 et S^{**} .

Cette intégrale s'écrit d'après la formule (2.42) :

$$\pm 4i\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2m_0 h} \operatorname{ch} m_0(z+h) \operatorname{ch} m_0(z'+h) e^{i m_0 r \cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

Son expression asymptotique peut être établie à l'aide de la méthode de la phase stationnaire décrite dans l'annexe 4.

$$\lambda = r \quad \text{et} \quad g(\theta) = m_0 \cos(\theta - \alpha)$$

$$g'(\theta) = -m_0 \sin(\theta - \alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \alpha$$

$$g''(\alpha) = -m_0 < 0$$

Pour $\theta = \alpha \in]-\pi/2, +\pi/2]$, $\cos(\theta - \alpha) \geq 0$ donc $\text{Im}(\zeta) \geq 0$, on doit donc choisir le signe + devant l'intégrale.

La formule (A4.3) donne alors pour $r \rightarrow \infty$:

$$(2.81) \quad S_2^* \sim \frac{2A}{\pi} \text{Re} \left[i \pi e^{-2m_0 h} \text{ch } m_0(z+h) \text{ch } m_0(z'+h) \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}} e^{i \left[r m_0 - \frac{\pi}{4} \right]} \frac{1}{\sqrt{r}} \right]$$

Pour $\theta = \alpha = \pi/2$, on fait le même raisonnement pour la borne supérieure dont la contribution est divisée par 2. Pour la borne inférieure, $g'(\theta) = 0$ et $g''(\theta) > 0$, on applique alors la formule (A4.4), mais comme $\text{Im}(\zeta) < 0$, le signe - devant l'intégrale rend la contribution de cette borne identique à celle de la borne supérieure, la formule (2.81) est encore valable.

Compte tenu de :

$$e^{-2m_0 h} = \frac{m_0 h - k_0 h}{m_0 h + k_0 h}, \quad i = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

en posant :

$$F(h) = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{8\pi}{m_0}} \frac{(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2}{[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \text{ch } m_0(z+h) \text{ch } m_0(z'+h)$$

on a :

$$S^* \sim S_2^* \sim F(h) \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \left(m_0 r + \frac{\pi}{4} \right)$$

et

$$S^{**} \sim F(h) \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \left(m_0 r + \frac{\pi}{4} \right)$$

puisque :

$$\cos \left(m_0 r - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(m_0 r + \frac{\pi}{4} \right)$$

Sur un cylindre de rayon R très grand Σ_∞ centré à l'origine des axes, on a :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r} + \vec{\rho} \quad \text{avec } \rho = O(\varepsilon) \\ \vec{R} &= R \cos \alpha \vec{i}_x + R \sin \alpha \vec{i}_y \\ \vec{\rho} &= x' \vec{i}_x + y' \vec{i}_y \\ r^2 &= R^2 + \rho^2 - 2 \vec{R} \cdot \vec{\rho} \\ r &= R \sqrt{1 - \frac{2 \vec{R} \cdot \vec{\rho} - \rho^2}{R^2}} \end{aligned}$$

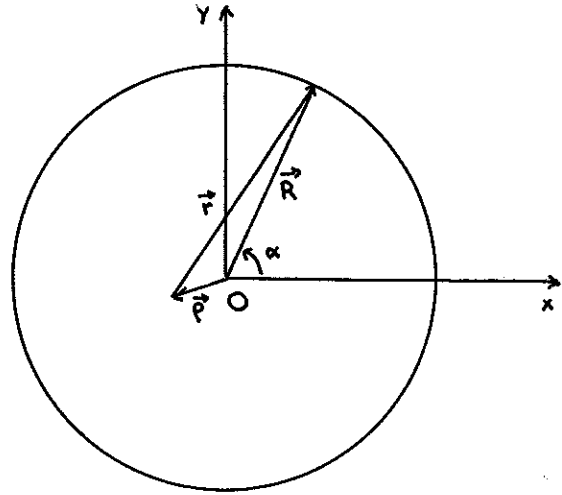


Figure 2.3

et en développant au premier ordre :

$$\begin{aligned} r &= R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} + o(\rho^2) = R - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) \\ r &\sim R \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty \\ \text{On a donc, lorsque } R &\rightarrow \infty : \end{aligned}$$

$$(2.82) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_c = S^* \cos \omega t + S^{**} \sin \omega t \sim F(h) \frac{1}{\sqrt{R}} \cos [m_0 [R - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)] + \frac{\pi}{4} - \omega t] \\ \mathcal{G}_s = S^* \sin \omega t - S^{**} \cos \omega t \sim -F(h) \frac{1}{\sqrt{R}} \sin [m_0 [R - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)] + \frac{\pi}{4} - \omega t] \end{cases}$$

sur Σ_∞ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$$

d'où, en ne conservant que les parties principales en $1/\sqrt{R}$:

$$(2.83) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial n} = m_0 \mathcal{G}_s \\ \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial n} = -m_0 \mathcal{G}_c \end{cases}$$

2.4.2. Potentiel induit à l'infini par une distribution de singularités, fonction de Kochin :

Le potentiel induit par une distribution quelconque de singularités s'obtient à partir de (2.68) et (2.69). En notation complexe, il s'écrit :

$$(2.84) \quad \tilde{\phi} = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\tilde{\sigma}(M') \tilde{S}(M, M') + \tilde{\mu}(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \tilde{S}(M, M') \right] dS(M')$$

avec :

$$\phi = \text{Re} [\tilde{\phi} e^{-i\omega t}], \quad \tilde{\sigma} = \sigma^* + i\sigma^{**}, \quad \tilde{\mu} = \mu^* + i\mu^{**}, \quad \tilde{S} = S^* + iS^{**}$$

$$\tilde{S} = F(h) \frac{1}{\sqrt{R}} \left\{ \cos \left[m_0 \left[R - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) \right] + \frac{\pi}{4} \right] + i \sin \left[m_0 \left[R - (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) \right] + \frac{\pi}{4} \right] \right\}$$

$$(2.85) \quad \tilde{S} = F(h) \frac{1}{\sqrt{R}} e^{i(m_0 R + \frac{\pi}{4})} e^{-i m_0 (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)}$$

On définit une fonction de Kochin $H(\alpha)$ par : [58]

$$(2.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}(\alpha) = \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{\text{sh } m_0 h} \iint_{\Sigma} \left\{ \tilde{\sigma} \text{ch } m_0(z'+h) e^{-i m_0(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)} + \right. \\ \left. \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} [\text{ch } m_0(z'+h) e^{-i m_0(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)}] \right\} dS(M') \end{array} \right.$$

Le potentiel lointain peut être écrit en fonction des développements précédents, compte tenu de :

$$(2.87) \quad \text{sh}^2(m_0 h) = \frac{(k_0 h)^2}{[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2]}$$

$$(2.88) \quad \tilde{\phi} = \sqrt{8\pi m_0} \frac{(k_0 h)^2}{m_0 h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \tilde{H}(\alpha) \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{sh } m_0 h} \frac{1}{\sqrt{R}} e^{i(m_0 R + \frac{\pi}{4})} + o\left(\frac{1}{R}\right)$$

Sur le cylindre Σ_{∞} , on a :

$$(2.89) \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial R} = i m_0 \tilde{\phi} + o\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right)$$

Donc :

$$(2.90) \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_{\infty}} = i m_0 \tilde{\phi}$$

ce qui donne :

$$(2.91) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = -m_0 \phi^{**} \\ \frac{\partial \phi^{**}}{\partial n} = m_0 \phi^* \end{cases}$$

Ces équations définissent le comportement à l'infini du potentiel pour une distribution de singularités quelconques situées à distance finie.

2.5. VERIFICATION DE LA VALIDITE DE LA SOLUTION TROUVEE :

Les fonctions de Green obtenues sont définies et régulières, elles doivent de plus vérifier les conditions (2.22). Les conditions de surface libre (2.22.a), de glissement sur le fond (2.22.b) et d'harmonicité (2.22.c) sont vérifiées par construction. Il n'en est pas de même des conditions de comportement sur les frontières (2.22.d) qui doivent être vérifiées par les formules (2.49).

Sur le cylindre à l'infini Σ_∞ , on a, d'après les formules (2.83) et (2.91) :

$$(2.92) \quad \begin{cases} \iint_{\Sigma_\infty} \left[\frac{\partial \phi_e^*}{\partial n} \Big|_{M'} \mathcal{G}_c(M, M', t) + \frac{\partial \phi_e^{**}}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_s(M, M', t) - \phi_e^*(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_c(M, M', t) - \phi_e^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_s(M, M', t) \right] dS(M') = \\ \iint_{\Sigma_\infty} [-m_0 \phi_e^{**} \mathcal{G}_c + m_0 \phi_e^* \mathcal{G}_s - \phi_e^* m_0 \mathcal{G}_s + \phi_e^{**} m_0 \mathcal{G}_c] dS(M') = 0 \end{cases}$$

Toutes les conditions requises sont donc bien satisfaites. Ceci justifie a posteriori les calculs effectués et confirme la validité des solutions obtenues par une méthode heuristique.

2.6. LES PROBLEMES DE RADIATION :

2.6.1. Décomposition en problèmes élémentaires :

Le problème de radiation du corps i est défini par les formules (2.15). Les mouvements du corps n'étant pas connus a priori, nous décomposerons le potentiel ϕ_{Ri} en tenant compte des inconnues qui sont les mouvements du corps i définis par :

$$(2.93) \quad A_i^q = A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t$$

où A_i^q est l'amplitude du mouvement d'indice q ($q=1,2,3$ pour les translations τ_x, τ_y, τ_z ; $q=4,5,6$ pour les rotations autour de Ox, Oy et $Oz, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ respectivement).

La vitesse d'un point P_0 du corps i est obtenue au premier ordre à partir des résultats du paragraphe 1.2.2 :

$$(2.94) \quad \vec{V}_{E_i}(P_0) = -\omega \sum_{q=1}^3 (A_i^{q*} \sin \omega t - A_i^{q**} \cos \omega t) \vec{e}_q - \omega \sum_{q=4}^6 (A_i^{q*} \sin \omega t - A_i^{q**} \cos \omega t) (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OP}_0)$$

\vec{e}_q désignant le vecteur unitaire de l'axe d'indice q :

$$\vec{e}_1 = \vec{i}_x, \quad \vec{e}_2 = \vec{i}_y, \quad \vec{e}_3 = \vec{i}_z$$

La condition de glissement s'écrit donc pour le corps i :

$$(2.95) \quad \frac{\partial \phi_{R_i}}{\partial n} = \vec{V}_{E_i} \cdot \vec{n} = -\omega \sum_{q=1}^6 \sigma_i^q (A_i^{q*} \sin \omega t - A_i^{q**} \cos \omega t)$$

avec :

$$(2.96) \quad \begin{cases} \sigma_i^q = \vec{e}_q \cdot \vec{n} & q = 1,2,3 \\ \sigma_i^q = (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OP}_0) \cdot \vec{n} & q = 4,5,6 \end{cases}$$

soit :

$$(2.97) \quad \frac{\partial \phi_{R_i}}{\partial n} = \sum_{q=1}^6 [-A_i^{q*} \omega \sin \omega t + A_i^{q**} \omega \cos \omega t] \sigma_i^q$$

Nous commencerons par résoudre 6 problèmes élémentaires $\phi_{R_i}^q$ définis par :

$$\frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial n} = \sigma_i^q \cos \omega t$$

$$(2.98) \left\{ \begin{array}{lll} \Delta \phi_{R_i}^q = 0 & \text{dans } D & \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = \sigma_i^q & \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = 0 & \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0 \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 & & \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_{R_i}^q \Big|_{z=0} = 0 & & \\ \phi_{R_i}^q \rightarrow 0 & \text{à l' } \infty & \end{array} \right.$$

Une fois ces six problèmes résolus, le potentiel ϕ_{R_i} pourra être reconstitué en tenant compte de la phase de l'excitation puisque $-\sin \omega t = \cos (\omega t + \pi/2)$. On aura alors à partir de la solution des 6 problèmes élémentaires.

$$(2.99) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{R_i}^q = \phi_{R_i}^{q*} \cos \omega t + \phi_{R_i}^{q**} \sin \omega t \quad \text{solution de } \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial n} = \sigma_i^q \cos \omega t \\ \phi_{R_i}^q = \sum_{q=1}^6 \omega [A_i^{q**} (\phi_{R_i}^{q*} \cos \omega t + \phi_{R_i}^{q**} \sin \omega t) + A_i^{q*} (-\phi_{R_i}^{q*} \sin \omega t + \phi_{R_i}^{q**} \cos \omega t)] \end{array} \right.$$

soit :

$$\phi_{R_i} = \phi_{R_i}^* \cos \omega t + \phi_{R_i}^{**} \sin \omega t$$

avec :

$$(2.100) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{R_i}^* = \omega \sum_{q=1}^6 (A_i^{q**} \phi_{R_i}^{q*} + A_i^{q*} \phi_{R_i}^{q**}) \\ \phi_{R_i}^{**} = \omega \sum_{q=1}^6 (A_i^{q**} \phi_{R_i}^{q**} - A_i^{q*} \phi_{R_i}^{q*}) \end{array} \right.$$

En utilisant la notation complexe définie en (2.76), il vient :

$$(2.101) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{R_i} = \text{Re} [\tilde{\phi}_{R_i} e^{-i \omega t}] \\ \tilde{\phi}_{R_i} = -i \omega \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \tilde{\phi}_{R_i}^q \end{array} \right.$$

2.6.2. Equations intégrales :

On peut reporter les 6 problèmes élémentaires des mouvements du corps i dans les équations intégrales (2.77) et (2.78). On obtient :

- pour une distribution de sources seules :

$$(2.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\sigma}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\sigma}(M') \tilde{K}(M, M') dS(M') = \tilde{\sigma}_i^q(M) \quad \text{pour } M \in \Sigma_i \\ = 0 \quad \text{pour } M \notin \Sigma_i \end{array} \right.$$

- pour une distribution mixte de Green :

$$(2.103) \quad \frac{\tilde{\mu}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\mu}(M') \tilde{D}(M, M') dS(M') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_i} \tilde{\sigma}_i^q \tilde{S}(M, M') dS(M')$$

avec :

$$\tilde{\sigma}_i^q = \sigma_i^q \quad \text{car} \quad \frac{\partial \phi_{R_i}^q}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = \sigma_i^q \cos \omega t$$

On peut remarquer que, compte tenu de la condition de glissement sur les corps, le potentiel de radiation correspondant au mouvement élémentaire q du corps i vérifiera :

$$(2.104) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = \sigma_i^q \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = 0 \\ \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = 0 \end{array} \right.$$

Ces équations intégrales devront être écrites pour les mouvements de chaque corps, il y aura donc $6N$ équations intégrales correspondant aux $6N$ problèmes élémentaires de radiation à résoudre.

2.6.3. Masses d'eau ajoutées, amortissements :

Une fois résolues les équations intégrales, on obtient les potentiels élémentaires $\tilde{\phi}_{R_i}^q$ sur les carènes. En utilisant l'équation de Lagrange linéarisée, on en déduit immédiatement les efforts hydrodynamiques.

On a donc :

$$(2.105) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_{R_i} = -i \omega \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \tilde{\phi}_{R_i}^q \\ p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Re} [\tilde{p} e^{-i \omega t}] = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} [\tilde{\phi}_{R_i} e^{-i \omega t}] \end{array} \right.$$

d'où :

$$(2.106) \quad \tilde{p} = \rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \tilde{\phi}_{R_i}^q$$

En intégrant ces pressions, on peut calculer les efforts d'indice p sur la carène Σ_j dus aux mouvements q de la carène Σ_i .

$$(2.107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{R_j}^p = -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \iint_{\Sigma_j} \tilde{\phi}_{R_i}^q \vec{n}_g^p \cdot dS \quad p=1,2,\dots,6 \\ \text{avec :} \quad \vec{n}_g^p = \vec{n} \quad \text{pour les forces} \quad p=1,2,3 \\ \vec{n}_g^p = \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} \quad \text{pour les moments} \quad p=4,5,6 \end{array} \right.$$

Les composantes des forces et des moments exercés sur le corps j par les mouvements q du corps i , sont données par :

$$(2.108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{R_j}^p = -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \iint_{\Sigma_j} \tilde{\phi}_{R_i}^q (\vec{e}_p \cdot \vec{n}) dS \quad p=1,2,3 \\ \vec{M}_{R_j}^{p-3} = -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \iint_{\Sigma_j} \tilde{\phi}_{R_i}^q \vec{e}_{p-3} \cdot (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS \quad p=4,5,6 \end{array} \right.$$

D'après les propriétés du produit mixte :

$$\vec{e}_{p-3} \cdot (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) = (\vec{e}_{p-3} \wedge \vec{OP}_0) \cdot \vec{n}$$

soit, compte tenu des notations (2.96) :

$$(2.109) \quad \tilde{F}_{R_j}^p = -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \iint_{\Sigma_j} \tilde{\phi}_{R_i}^q \sigma_j^p dS \quad p=1,2,\dots,6$$

avec, d'après (2.104) :

$$\sigma_j^p = \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j}$$

Les efforts d'indice p sur le corps j exercés par le mouvement q du corps i s'écrivent sous la forme suivante :

$$(2.110) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{R_j}^p = -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) \iint_{\Sigma_j} \phi_{R_i}^{q*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} dS \\ -\rho \omega^2 \sum_{q=1}^6 (A_i^{q*} \sin \omega t - A_i^{q**} \cos \omega t) \iint_{\Sigma_j} \phi_{R_i}^{q**} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} dS \end{array} \right.$$

On peut introduire les coefficients :

$$(2.111) \quad M_{ij}^{pq} = -\rho \iint_{\Sigma_j} \phi_{R_i}^{q*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} dS$$

et

$$(2.112) \quad B_{ij}^{pq} = -\rho \omega \iint_{\Sigma_j} \phi_{R_i}^{q**} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} dS$$

où M_{ij}^{pq} et B_{ij}^{pq} sont respectivement appelés masses d'eau ajoutées et amortissements d'indice p sur le corps j lorsque le corps i effectue le mouvement d'indice q .

Compte tenu de ces notations, les efforts hydrodynamiques deviennent :

$$(2.113) \quad F_{R_j}^p = \left[\sum_{q=1}^6 \omega^2 M_{ij}^{pq} (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) + \omega B_{ij}^{pq} (A_i^{q*} \sin \omega t - A_i^{q**} \cos \omega t) \right]$$

Si l'on remarque que l'accélération Γ_{Ei}^q du mouvement q du corps i est égale à :

$$(2.114) \quad \Gamma_{Ei}^q = -\omega^2 (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t)$$

et la vitesse V_{Ei}^q du mouvement q du corps i à :

$$(2.115) \quad V_{Ei}^q = -\omega A_1^{q*} \sin \omega t + \omega A_1^{q**} \cos \omega t$$

on peut encore mettre les efforts hydrodynamiques sous la forme :

$$(2.116) \quad F_{Rj}^p = -\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^6 (M_{ij}^{pq} \Gamma_{Ei}^q + B_{ij}^{pq} V_{Ei}^q)$$

où M_{ij}^{pq} est un terme oscillant en phase avec l'accélération du mouvement q du corps i , d'où le terme de masse d'eau ajoutée, et B_{ij}^{pq} est en phase avec la vitesse du mouvement q du corps i , d'où le terme de coefficient d'amortissement.

Les masses d'eau ajoutées ont la dimension de masses ou d'inerties, mais ne sont pas constantes puisqu'elles sont fonctions, en plus de la géométrie du corps, de la période d'oscillation et de la profondeur. Il serait plus approprié de parler d'efforts hydrodynamiques de radiation.

Notation matricielle :

Posons :

$$(2.117) \quad a) \quad \bar{M}_{ij} = \begin{vmatrix} M_{ij}^{11} & \dots & M_{ij}^{16} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ M_{ij}^{61} & \dots & M_{ij}^{66} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad b) \quad \bar{B}_{ij} = \begin{vmatrix} B_{ij}^{11} & \dots & B_{ij}^{16} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ B_{ij}^{61} & \dots & B_{ij}^{66} \end{vmatrix}$$

L'équation (2.116) s'écrit avec ces notations :

$$(2.118) \quad |F_{Rj}| = -\sum_{i=1}^N (\bar{M}_{ij} |\Gamma_{Ei}| + \bar{B}_{ij} |V_{Ei}|)$$

soit :

$$(2.119) \quad \begin{vmatrix} F_{R1} \\ F_{R2} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{RN} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \bar{M}_{11} & \dots & \bar{M}_{N1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{M}_{1N} & \dots & \bar{M}_{NN} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{E1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{EN} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{B}_{11} & \dots & \bar{B}_{N1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \bar{B}_{1N} & \dots & \bar{B}_{NN} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{E1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{EN} \end{vmatrix}$$

2.6.4. Propriétés des masses d'eau ajoutées et des amortissements :

- Coefficients d'amortissements :

Les coefficients d'amortissements B_{ij}^{pq} peuvent s'écrire sous la forme :

$$B_{ij}^{pq} = -\rho \omega \iint_{\Sigma_j} \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) dS$$

puisque $\frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \Big|_{\Sigma_j} = 0 \quad \forall i, j$

$\phi_{R_i}^{q^{**}}$ et $\phi_{R_j}^{p^*}$

sont des fonctions harmoniques dans le domaine fluide, on applique la deuxième formule de Green (A2.8) dans le domaine fluide extérieur aux carènes :

$$\left| \begin{aligned} 0 &= -\rho \omega \iint_{\Sigma_j} \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) dS - \rho \omega \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \iint_{\Sigma_i} \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) dS \\ &+ \rho \omega \iint_{SL} \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial z} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial z} \right) dS + \rho \omega \iint_{\Sigma_\infty} \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) dS \\ &- \rho \omega \iint_F \left(\phi_{R_i}^{q^{**}} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial z} - \phi_{R_j}^{p^*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial z} \right) dS \end{aligned} \right.$$

\vec{n} étant la normale extérieure aux corps et à Σ_∞ .

Sur le fond horizontal F :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

Sur Σ_∞ , d'après (2.84) :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} = -m_0 \phi_{R_j}^{p^{**}}$$

$$\frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} = m_0 \phi_{R_i}^{q^*}$$

Sur SL, la condition de surface libre donne :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial z} = k_0 \phi_{R_j}^{p*} \quad , \quad \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial z} = k_0 \phi_{R_i}^{q**} \quad \text{d'où} \quad \iint_{SL} = 0$$

Enfin sur Σ_i , $i \neq j$, d'après (2.104) :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} = \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \iint_{\Sigma_i} = 0$$

D'où :

$$B_{ij}^{pq} = \rho \omega m_0 \iint_{\Sigma_\infty} (\phi_{R_i}^{q**} \phi_{R_j}^{p**} + \phi_{R_j}^{p*} \phi_{R_i}^{q*}) dS$$

On en déduit les propriétés suivantes pour les coefficients d'amortissement :

- Symétries :

$$(2.120) \quad \begin{aligned} B_{ij}^{pq} &= B_{ji}^{qp} \quad \forall i, j, p, q \\ \text{d'où : } B_{ii}^{pq} &= B_{ii}^{qp} \\ B_{ij}^{pp} &= B_{ji}^{pp} \end{aligned}$$

- Signe des coefficients :

$$(2.121) \quad B_{ii}^{pp} \geq 0 \quad \forall i, p$$

Dans le cas d'un seul corps, les coefficients diagonaux de la matrice symétrique des coefficients d'amortissement sont positifs. Il n'en est pas de même pour plusieurs corps : B_{ij}^{pp} peut être négatif pour i différent de j .

- Masses d'eau ajoutées :

Par le même procédé, on peut mettre M_{ij}^{pq} sous la forme :

$$M_{ij}^{pq} = -\rho \iint_{\Sigma_j} (\phi_{R_i}^{q*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} + \phi_{R_j}^{p**} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n}) dS$$

Considérons le vecteur :

$$\vec{A} = \phi_{R_i}^{q^*} \vec{\text{grad}} \phi_{R_j}^{p^*} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \vec{\text{grad}} \phi_{R_i}^{q^{**}}$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski dans le domaine fluide D extérieur aux carènes, il vient :

$$\iiint_D \text{div} \vec{A} \, dD = \iiint_D (\phi_{R_i}^{q^*} \Delta \phi_{R_j}^{p^*} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \Delta \phi_{R_i}^{q^{**}}) \, dD +$$

$$\iiint_D (\vec{V}_{R_i}^{q^*} \cdot \vec{V}_{R_j}^{p^*} + \vec{V}_{R_i}^{q^{**}} \cdot \vec{V}_{R_j}^{p^{**}}) \, dD$$

en notant $\vec{V} = \vec{\text{grad}} \phi$

$$\iiint_D \text{div} \vec{A} \, dD = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n}_e \, dS \quad \text{où } \vec{n}_e \text{ est la normale extérieure à } D \text{ (intérieure aux corps)}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n}_e \, dS &= - \iint_{\Sigma_j} \left(\phi_{R_i}^{q^*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) \, dS + \iint_{SL} \left(\phi_{R_i}^{q^*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial z} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial z} \right) \, dS \\ &\quad - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \iint_{\Sigma_i} \left(\phi_{R_i}^{q^*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) \, dS + \iint_{\Sigma_\infty} \left(\phi_{R_i}^{q^*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} \right) \, dS \\ &\quad - \iint_F \left(\phi_{R_i}^{q^*} \frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial z} + \phi_{R_j}^{p^{**}} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial z} \right) \, dS \end{aligned}$$

Sur Σ_i , $i \neq j$, d'après (2.104) :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p^*}}{\partial n} = \frac{\partial \phi_{R_i}^{q^{**}}}{\partial n} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \iint_{\Sigma_i} = 0$$

Sur Σ_∞ , d'après (2.89) :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial n} = -m_0 \phi_{R_j}^{p**}$$

$$\frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} = m_0 \phi_{R_i}^{q*}$$

d'où :

$$\iint_{\Sigma_\infty} (-m_0 \phi_{R_i}^{q*} \phi_{R_j}^{p**} + m_0 \phi_{R_j}^{p**} \phi_{R_i}^{q*}) dS = 0$$

Sur SL :

$$\frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial z} = k_0 \phi_{R_j}^{p*} , \quad \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial z} = k_0 \phi_{R_i}^{q**}$$

$$\text{sur F : } \frac{\partial \phi_{R_j}^{p*}}{\partial z} = \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial z} = 0$$

Il vient :

$$M_{ij}^{pq} = \rho \iiint_D (\vec{V}_{R_i}^{q*} \vec{V}_{R_j}^{p*} + \vec{V}_{R_i}^{q**} \vec{V}_{R_j}^{p**}) dD - \rho k_0 \iint_{SL} (\phi_{R_i}^{q*} \phi_{R_j}^{p*} + \phi_{R_j}^{q**} \phi_{R_i}^{p**}) dS$$

On en déduit les propriétés de symétrie des masses d'eau ajoutées :

$$(2.122) \quad \begin{aligned} M_{ij}^{pq} &= M_{ji}^{qp} & \forall i, j, p, q \\ M_{ii}^{pq} &= M_{ii}^{qp} \\ M_{ij}^{pp} &= M_{ji}^{pp} \end{aligned}$$

Par contre, pour $i=j$ et $p=q$, il n'est pas possible de se prononcer sur le signe de M_{ii}^{pp} qui est un terme se présentant comme la différence de deux carrés. Il est fréquent de rencontrer des coefficients diagonaux de masse d'eau ajoutée négatifs, par exemple dans le cas de corps non simplement connexes.

- Valeurs asymptotiques :

Lorsque $T \rightarrow 0$ ou $T \rightarrow \infty$, le comportement asymptotique des coefficients S^{**} , exprimé par les formules (2.65) et (2.66) , reporté dans les équations intégrales (2.102) et (2.103) donne immédiatement $B^{pq}_{ij} \rightarrow 0 \quad \forall i, j, p, q$.

- Ces propriétés ont été établies théoriquement. Elles constituent donc un test de validité et de précision pour toute solution numérique du problème.

2.7. LE PROBLEME DE DIFFRACTION :

2.7.1. Position du problème

Le problème de diffraction de la houle incidente par des corps fixes est posé en (2.13). La condition de glissement s'écrit :

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Il n'existe donc qu'un seul problème de diffraction, la condition de glissement étant affichée sur chaque corps dans sa position initiale.

Les pressions de diffraction sont données par :

$$p_D = - \rho \frac{\partial \phi_D}{\partial t}$$

auxquelles il faut ajouter, pour obtenir la pression hydrodynamique complète, le terme dû à la houle incidente :

$$p_I = - \rho \frac{\partial \phi_I}{\partial t}$$

La pression totale due à la houle incidente et diffractée sera donc :

$$p_{ex} = - \rho \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial t} + \frac{\partial \phi_I}{\partial t} \right)$$

La houle incidente étant donnée par (2.2):

$$\phi_I = \text{Re} \left(\tilde{\phi}_I e^{-i\omega t} \right)$$

avec

$$\tilde{\phi}_I = - \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} e^{+i [m_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)]}$$

β , étant l'angle de propagation de la houle incidente avec l'axe Ox .

On pose :

$$\tilde{\phi}_I = a \tilde{\phi}'_I$$

où $\tilde{\phi}'_I$ ne dépend plus de l'amplitude de la houle incidente. Ce terme peut s'écrire, compte tenu de :

$$\omega \operatorname{ch} m_0 h = \frac{g}{\omega} m_0 \operatorname{sh} m_0 h \quad \text{puisque} \quad \omega^2 = g m_0 \operatorname{th} m_0 h$$

$$(2.123) \quad \tilde{\phi}'_I = -\omega \frac{\operatorname{ch} m_0(z+h)}{m_0 \operatorname{sh} m_0 h} e^{+i[m_0(x \cos \beta + y \sin \beta)]}$$

Le problème élémentaire de diffraction ϕ'_D est donc défini par :

$$(2.124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_D = 0 \quad \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \\ E \phi_D \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi_D \rightarrow 0 \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_D}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \Big|_{\Sigma} \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \end{array} \right.$$

2.7.2. Equations intégrales

Les équations intégrales du problème se déduisent immédiatement des formules (2.77) et (2.78).

On obtient pour une distribution de sources :

$$(2.125) \quad \frac{\tilde{\sigma}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\sigma}(M') \tilde{K}(M, M') dS(M') = - \frac{\partial \phi'_I(M)}{\partial n}$$

et pour une distribution mixte de Green :

$$(2.126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\mu}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\mu}(M') \tilde{D}(M, M') dS(M') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi'_I}{\partial n} \right) \tilde{S}(M, M') dS(M') \\ \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_N \end{array} \right.$$

La solution de ces équations intégrales nous permet d'obtenir le potentiel $\tilde{\phi}'_D$, donc le potentiel $\tilde{\phi}_D = a \tilde{\phi}'_D$ puisque l'amplitude de la houle n'intervient que comme facteur multiplicatif.

2.7.3. Efforts d'excitation :

Une fois connu le potentiel ϕ_D , le potentiel d'excitation s'écrit :

$$\phi_{ex} = \phi_I + \phi_D = a (\phi'_I + \phi'_D) = a \phi'_{ex}$$

soit, puisque :

$$\phi'_{ex} = \phi'^{*}_{ex} \cos \omega t + \phi'^{**}_{ex} \sin \omega t$$

$$\phi'^{*}_{ex} = \phi'^{*}_D - \frac{\omega \operatorname{ch} m_0(z+h)}{m_0 \operatorname{sh} m_0 h} \cos [m_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)]$$

$$\phi'^{**}_{ex} = \phi'^{**}_D - \frac{\omega \operatorname{ch} m_0(z+h)}{m_0 \operatorname{sh} m_0 h} \sin [m_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)]$$

Les pressions sont données par :

$$p = -\rho \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial t} = p^* \cos \omega t + p^{**} \sin \omega t$$

d'où :

$$p^* = -\rho a \omega \phi'^{*}_{ex}$$

$$p^{**} = \rho a \omega \phi'^{**}_{ex}$$

Les efforts d'indice q sur le corps i s'expriment alors, d'après (1.82) et (1.83) et en tenant compte des relations (2.96) et (2.104) par :

$$(2.127) \left\{ \begin{array}{l} F_{ex_i}^{q*} = +\rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \phi'^{**}_{ex} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} dS \quad i = 1, 2, \dots, N \quad q = 1, \dots, 6 \\ F_{ex_i}^{q**} = -\rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \phi'^{*}_{ex} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} dS \\ \text{car : } \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} = \begin{cases} \vec{e}_q \cdot \vec{n} & q = 1, 2, 3 \\ (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OP}_0) \cdot \vec{n} & q = 4, 5, 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ces efforts se décomposent en deux parties, les efforts de diffraction donnés par :

$$(2.128) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{D_i}^{q*} = + \rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \phi_{D_i}^{q**} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} dS \\ F_{D_i}^{q**} = - \rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \phi_{D_i}^{q*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} dS \end{array} \right.$$

et les efforts dus à la houle incidente, qui sont connus sans avoir besoin de résoudre une équation intégrale :

$$(2.129) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{I_i}^{q*} = -\rho a \omega^2 \iint_{\Sigma_i} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{m_0 \text{ sh } m_0 h} \sin [m_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)] \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} dS \\ F_{I_i}^{q**} = +\rho a \omega^2 \iint_{\Sigma_i} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{m_0 \text{ sh } m_0 h} \cos [m_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)] \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} dS \end{array} \right.$$

Ces efforts sont appelés efforts de Froude-Krylov .

2.7.4. Formules d'Haskind :

Les formules d'Haskind [64] permettent de démontrer que, si l'on ne s'intéresse qu'aux efforts globaux sur les corps , il n'est pas nécessaire de résoudre une équation intégrale supplémentaire pour obtenir les efforts de diffraction sur les carènes si l'on a résolu au préalable les problèmes de radiation.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la notation complexe qui permet de traiter simultanément le cas des efforts en $\cos \omega t$ et en $\sin \omega t$.

$$(2.130) \quad \tilde{F}_{ex_i}^q = -i \rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}^q}{\partial n} + \tilde{\phi}'_I \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}^q}{\partial n} \right) dS$$

que l'on peut écrire :

$$\tilde{F}_{\text{ex}_i}^q = -i \rho a \omega \iint_{\Sigma_i} \left[\left(\tilde{\phi}'_I \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_I}{\partial n} \right) + \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) \right] dS$$

puisque sur Σ_i :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}'_I}{\partial n} = - \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n}$$

La première partie de l'intégrale ne dépend pas de $\tilde{\phi}'_D$, aussi nous allons transformer la deuxième partie en appliquant la deuxième formule de Green dans le domaine fluide D extérieur aux carènes :

$$\left| \begin{aligned} & \iiint_D \left(\tilde{\phi}'_D \Delta \tilde{\phi}_{R_i} - \tilde{\phi}_{R_i} \Delta \tilde{\phi}'_D \right) dD = 0 = \iint_{\Sigma} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) dS + \iint_F \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial z} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial z} \right) dS \\ & - \iint_{SL} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial z} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial z} \right) dS - \iint_{\Sigma_{\infty}} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \right|$$

Compte tenu de la condition de glissement sur le fond, l'intégrale sur F est nulle. Les potentiels vérifiant la condition de surface libre, l'intégrale sur celle-ci est nulle. Il en est de même de l'intégrale sur Σ_{∞} d'après (2.88).

Donc :

$$\iint_{\Sigma} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) dS = i m_0 \iint_{\Sigma_{\infty}} \left(\tilde{\phi}'_D \tilde{\phi}_{R_i} - \tilde{\phi}_{R_i} \tilde{\phi}'_D \right) dS = 0$$

d'où :

$$\iint_{\Sigma} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) dS = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \iint_{\Sigma_j} \left(\tilde{\phi}'_D \frac{\partial \tilde{\phi}_{R_i}}{\partial n} - \tilde{\phi}_{R_i} \frac{\partial \tilde{\phi}'_D}{\partial n} \right) dS$$

or, sur Σ_j :

$$\frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim q}}{\partial n} = 0 \quad , \quad \text{d'où :}$$

$$\iint_{\Sigma_j} (\phi_D^{\sim q} \frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim q}}{\partial n}) dS = \iint_{\Sigma_j} (\phi_I^{\sim q} \frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim q}}{\partial n}) dS = 0$$

et comme :

$$\frac{\partial \phi_D^{\sim}}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_I^{\sim}}{\partial n}$$

il vient :

$$\iint_{\Sigma_i} (\phi_D^{\sim} \frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{\sim} \frac{\partial \phi_D^{\sim}}{\partial n}) dS = + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \iint_{\Sigma_j} (\phi_I^{\sim} \frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{\sim} \frac{\partial \phi_I^{\sim}}{\partial n}) dS$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$(2.131) \quad \tilde{F}_{ex_i}^q = - i \rho a \omega \iint_{\Sigma} (\phi_I^{\sim} \frac{\partial \phi_{R_i}^{\sim}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{\sim} \frac{\partial \phi_I^{\sim}}{\partial n}) dS$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_N$$

Ce qui donne :

$$(2.132) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{ex_i}^{q*} = + \rho a \omega \iint_{\Sigma} (\phi_I^{q**} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q*}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{q**} \frac{\partial \phi_I^{q*}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{q*} \frac{\partial \phi_I^{q**}}{\partial n}) dS \\ F_{ex_i}^{q**} = - \rho a \omega \iint_{\Sigma} (\phi_I^{q*} \frac{\partial \phi_{R_i}^{q**}}{\partial n} - \phi_{R_i}^{q*} \frac{\partial \phi_I^{q**}}{\partial n} + \phi_{R_i}^{q**} \frac{\partial \phi_I^{q*}}{\partial n}) dS \end{array} \right.$$

Ces expressions ne dépendent plus du potentiel ϕ_D^{\sim} , il n'est donc pas nécessaire, pour calculer les efforts sur les carènes, de résoudre le problème de diffraction si l'on a résolu au préalable les problèmes de radiation.

Ces formules, qui généralisent celles obtenues par Haskind [64] dans le cas d'un seul corps, ne donnent aucun renseignement sur des grandeurs locales telles que les pressions, et il est indispensable de résoudre les équations intégrales (2.125) ou

(2.126) pour connaître celles-ci. Dans ce cas le calcul des efforts pourra être effectué à l'aide des formules (2.127) et les formules d'Haskind constituent alors un test numérique de validité de la solution obtenue.

2.8. LES EQUATIONS DU MOUVEMENT :

2.8.1. Mouvements d'un ensemble de corps :

Les problèmes hydrodynamiques étant résolus, on peut faire le bilan complet des efforts exercés sur un ensemble de corps soumis aux actions de la houle. On distinguera les efforts hydrostatiques F_{hs} (1.99), les efforts d'inertie F_M (1.111), les efforts hydrodynamiques F_{hd} qui se décomposent en efforts de radiation F_R (masses d'eau ajoutées, amortissements) (2.119) et efforts d'excitation F_{ex} dus à la diffraction et à la houle incidente (2.127) ou (2.132), et éventuellement des efforts extérieurs de liaison F_L dus par exemple aux dispositifs d'ancrage des flotteurs.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$F_M = F_{hs} + F_R + F_L + F_{ex}$$

Les termes F_M, F_{hs}, F_R et éventuellement F_L sont fonction des amplitudes des mouvements des corps, F_{ex} n'est fonction que de l'amplitude de la houle. On écrit donc:

$$(2.133) \quad F_M - F_{hs} - F_R - F_L = F_{ex}$$

Pour des mouvements sinusoïdaux du corps i définis par :

$$(2.134) \quad A_i^q = A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t$$

où A_i^q représente la variation du mouvement d'indice q du corps i en fonction du temps avec $q=1,2,3$ pour les translations τ_x, τ_y, τ_z suivant Ox, Oy, Oz et $q=4,5,6$ pour les rotations $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ autour de Ox, Oy et Oz , l'équation du mouvement d'indice q du corps i s'écrit :

$$(2.135) \quad \begin{cases} -\omega^2 \sum_{p=1}^6 \bar{M}_{ipq} (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) + \sum_{p=1}^6 \bar{S}_{ipq} (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) - \\ \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^6 [\omega^2 \bar{M}_{ji}^{qp} (A_j^{p*} \cos \omega t + A_j^{p**} \sin \omega t) + \omega \bar{B}_{ji}^{pq} (A_j^{p*} \sin \omega t - A_j^{p**} \cos \omega t)] - F_L = \\ F_{ex_i}^{q*} \cos \omega t + F_{ex_i}^{q**} \sin \omega t \end{cases}$$

ou bien en notation complexe, après avoir posé :

$$\omega^2 \tilde{M}_{ji}^{qp} = \omega^2 \bar{M}_{ji}^{qp} + i \omega \bar{B}_{ji}^{qp}$$

$$(2.136) \quad -\omega^2 \sum_{p=1}^6 \bar{M}_{ipq} \bar{A}_i + \sum_{p=1}^6 \bar{S}_{ipq} \bar{A}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^6 \omega^2 \bar{M}_{ji}^{qp} \bar{A}_j - \bar{F}_L = \bar{F}_{ex_i}^q$$

Les coefficients :

$$\bar{M}_{ipq}, \bar{S}_{ipq}, \bar{M}_{ji}^{qp}, \bar{B}_{ji}, \bar{F}_{ex_i}^q$$

étant définis respectivement par les formules (1.111) , (1.99) , (2.117.a) , (2.117.b), (2.131) .

Ces équations, traduites sous forme matricielle, constituent un système linéaire dont les solutions sont les mouvements cherchés.

$$(2.137) \quad \begin{pmatrix} \bar{S}_1 - \omega^2 (\bar{M}_1 + \bar{M}_{11}) & \omega \bar{B}_{11} & \dots & -\omega^2 \bar{M}_{N1} & \omega \bar{B}_{N1} \\ -\omega \bar{B}_{11} & \bar{S}_1 - \omega^2 (\bar{M}_1 + \bar{M}_{11}) & \dots & -\omega \bar{B}_{N1} & -\omega^2 \bar{M}_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\omega^2 \bar{M}_{1N} & \omega \bar{B}_{1N} & \dots & \bar{S}_N - \omega^2 (\bar{M}_N + \bar{M}_{NN}) & \omega \bar{B} \\ -\omega \bar{B}_{1N} & -\omega^2 \bar{M}_{1N} & \dots & -\omega \bar{B} & \bar{S}_N - \omega^2 (\bar{M}_N + \bar{M}_{NN}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_1^{**} \\ \vdots \\ \bar{A}_N \\ \bar{A}_N^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{ex_1}^* \\ \bar{F}_{ex_1}^{**} \\ \vdots \\ \bar{F}_{ex_N}^* \\ \bar{F}_{ex_N}^{**} \end{pmatrix} + \bar{F}_L$$

ou bien, en notation complexe :

$$(2.138) \quad \begin{pmatrix} \bar{S}_1 - \omega^2 (\bar{M}_1 + \bar{M}_{11}) & \dots & -\omega^2 \bar{M}_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega^2 \bar{M}_{1N} & \dots & \bar{S}_N - \omega^2 (\bar{M}_N + \bar{M}_{NN}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{ex_1} \\ \vdots \\ \bar{F}_{ex_N} \end{pmatrix} + \bar{F}_L$$

Dans ces systèmes, les forces d'excitation sont proportionnelles à l'amplitude de la houle incidente. S'il en est de même des forces de liaison, on rapportera l'amplitude des mouvements à celle de la houle incidente qui n'interviendra alors que comme facteur multiplicatif pour les solutions.

On remarque que dans le cas d'un système composé de plusieurs corps oscillant indépendamment, tous les mouvements sont couplés par l'intermédiaire des solutions des problèmes hydrodynamiques de radiation (masses d'eau ajoutées et amortissements). On ne doit donc pas confondre le cas d'un corps non simplement connexe (comme, par exemple, un catamaran ou une plateforme semi-submersible) avec un système composé de plusieurs corps. Dans le premier cas, il n'y a que 6 mouvements possibles, donc 6 problèmes élémentaires de radiation, chaque problème tenant compte des interactions entre les différentes parties du flotteur. Dans le second

cas, les amplitudes des flotteurs sont a priori indépendantes les unes des autres et il y a 6N problèmes élémentaires de radiation, le couplage étant réalisé par les équations du mouvement.

2.8.2. Raideurs et amortissements entre corps :

Dans la plupart des cas, les efforts d'ancrage sont du type raideurs et amortissements linéaires et donc proportionnels aux mouvements des corps. Les efforts sur le corps i dus aux mouvements du corps j s'écrivent en notation complexe:

$$(2.139) \quad \tilde{F}_{Li} = -(\bar{P}_{ij} + i \omega \bar{Q}_{ij}) \tilde{A}_j = -\tilde{P}_{ij} \tilde{A}_j$$

où \bar{P}_{ij} est la matrice de couplage élastique entre les efforts sur le corps i et les mouvements du corps j (matrice 6x6) et \bar{Q}_{ij} est la matrice de couplage d'amortissement entre les efforts sur le corps i et les vitesses du corps j (matrice 6x6).

Le système linéaire s'écrit alors :

$$(2.140) \quad \begin{vmatrix} \bar{S}_1 + \tilde{P}_{11} - \omega^2 (\bar{M}_1 + \tilde{M}_{11}) & \dots & \tilde{P}_{N1} - \omega^2 \tilde{M}_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{P}_{1N} - \omega^2 \tilde{M}_{1N} & \dots & \bar{S}_N + \tilde{P}_{NN} - \omega^2 (\bar{M}_N + \tilde{M}_{NN}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{F}_{ex1} \\ \vdots \\ \tilde{F}_{exN} \end{vmatrix}$$

Par ce procédé, il est possible de tenir compte d'amortissements visqueux linéaires, ce qui permet d'essayer de déterminer les amplitudes à la résonance des mouvements si l'on dispose de résultats obtenus par une autre méthode (expériences ou théorie du fluide visqueux).

On peut généraliser cette approche lorsque ces efforts sont faiblement non linéaires. Les amplitudes du premier harmonique de la réponse sont obtenues par itérations, les efforts de couplage étant calculés avec les amplitudes de l'itération précédente. Dans les cas usuels, tels que l'amortissement visqueux non-linéaire en roulis, cette méthode converge en quelques itérations (de l'ordre d'une dizaine).

2.8.3. Efforts de liaison entre sous-ensembles :

Lorsqu'on désire connaître les efforts de liaison entre différents sous-ensembles, il est encore possible d'utiliser les résultats précédents, le principe général étant de résoudre le problème comme si les différents sous-ensembles du corps étaient indépendants, les efforts étant déterminés en écrivant que chaque sous-ensemble

effectue des mouvements identiques.

Ce problème peut être résolu de manière approchée en couplant les mouvements des différents sous-ensembles à l'aide de raideurs suffisamment importantes pour que les mouvements soient presque identiques, les efforts étant obtenus à partir des raideurs en tenant compte des différences des mouvements. L'avantage de cette approche est sa généralité, puisque quel que soit le type de couplage, les équations à résoudre sont les mêmes; l'inconvénient principal est la difficulté de déterminer les raideurs pour obtenir une précision suffisante sur les efforts.

La deuxième approche consiste à écrire les équations avec comme inconnues supplémentaires les efforts de liaison, les équations supplémentaires traduisant le fait que les mouvements des différents sous-ensembles sont identiques. Cette méthode est rigoureuse, mais il faut récrire complètement le système à résoudre pour chaque configuration.

Par exemple, lorsque l'on s'intéresse aux efforts de liaison entre les coques d'un catamaran, le système linéaire donnant les mouvements et les efforts s'écrit :

$$(2.141) \begin{vmatrix} \bar{S}_1 - \omega^2 (\bar{M}_1 + \tilde{M}_{11}) & -\omega^2 \bar{M}_{21} & \tilde{I} \\ -\omega^2 \bar{M}_{12} & \bar{S}_2 - \omega^2 (\bar{M}_2 + \tilde{M}_{22}) & -\tilde{I} \\ \tilde{I} & -\tilde{I} & \tilde{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{F}_{ex1} \\ \tilde{F}_{ex2} \\ \tilde{0} \end{vmatrix}$$

\tilde{F} étant la matrice complexe des efforts de liaison entre coques, \tilde{I} la matrice complexe $(1+i)I$ où I est la matrice unité et 0 la matrice nulle.

Après résolution, on obtient la force \tilde{F} de liaison entre les coques, ainsi que l'amplitude des mouvements du catamaran $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$.

2.8.4 Comportement asymptotique :

Aux faibles périodes, les mouvements tendent vers zéro. Aux grandes périodes, lorsque T tend vers l'infini, les mouvements des corps flottants suivent la cinématique de la houle incidente (mouvement orbital pour le cavement et le pilonnement, pente de la houle pour le roulis ou le tangage). Il n'en est pas de même lorsque les corps ne sont pas en équilibre hydrostatique, mais maintenus en position initiale par une force extérieure constante. Dans ce cas, les mouvements des corps aux grandes périodes peuvent devenir supérieurs au mouvement orbital pour les corps à flottabilité positive ($M < \rho V$) et inférieurs pour les corps à flottabilité négative ($M > \rho V$) puisque les forces d'inertie changent alors que tous les autres efforts sont inchangés. Dans le cas des corps flottants, le comportement asymptotique constitue un test numérique de bonne résolution des problèmes hydrodynamiques et hydrostatiques.

2.8.5. Conclusion :

Les équations du mouvement nous ont permis d'obtenir le premier harmonique des réponses (mouvements et efforts de liaison et d'ancrage) pour un ensemble de corps sollicités par une houle harmonique du premier ordre et reliés entre eux (ou ancrés) à l'aide d'efforts extérieurs de type raideur ou amortissement, linéaires ou faiblement non-linéaires.

A ce stade, on peut considérer que le problème complet au premier ordre a été résolu. Il est cependant possible de poursuivre les calculs de façon à obtenir la contribution du problème du premier ordre à ceux d'ordre supérieur. En particulier, ces calculs seront poursuivis dans les paragraphes suivants en vue de déterminer la contribution du potentiel du premier ordre aux efforts constants du deuxième ordre.

2.9. EFFORTS DE DERIVE :

2.9.1. Introduction :

Une fois obtenus les mouvements des corps, on peut reprendre les formules du paragraphe 1.4.4 faisant le bilan des efforts extérieurs. Les termes du second ordre se présentent sous la forme de produits de termes du premier ordre et de termes fonction de la solution du problème au second ordre. Compte tenu de la variation temporelle de l'excitation, les efforts du second ordre se décomposent en un terme constant, fonction des produits de grandeurs du premier ordre et de la constante de l'équation de Lagrange (qui est nulle en profondeur infinie), et de termes de pulsation double de celle de la houle incidente. Les efforts constants sont donc proportionnels au carré de l'amplitude de la houle incidente. La mise en évidence expérimentale de ces termes est aisée, puisque ceux-ci correspondent à un déplacement des corps par rapport à une position moyenne qui était fixe au premier ordre, donc à une dérive des corps, que l'on peut empêcher à l'aide d'un système d'ancrage statique ou de positionnement dynamique. On constate donc que, pour ce qui est des efforts constants, la solution du problème du premier ordre permet d'obtenir les efforts jusqu'au second ordre inclus si l'on tient compte de la constante de l'équation de Lagrange. Il n'en est pas de même pour les termes fluctuants du second ordre qui nécessitent la connaissance de l'intégrale sur les corps de la dérivée par rapport au temps du potentiel du deuxième ordre.

2.9.2. Formulation des efforts de dérive par intégration des pressions :

Reprenons les formules du paragraphe 1.4.4 écrites pour le corps i en omettant les termes en ϕ_2 donnant une contribution nulle dans les efforts constants.

$$\vec{F}_{hs1} = - (S_{i33} \tau_{z_i} + S_{i34} \theta_{x_i} + S_{i35} \theta_{y_i}) \vec{i}_z$$

$$\vec{F}_{hs2} = \theta_i \wedge \vec{F}_{hs1} + [S_{i33} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i34} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i35} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_z$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{hs1} &= - [\tau_{z_i} S_{i34} + \theta_{x_i} S_{i44} + \theta_{y_i} S_{i45}] \vec{i}_x - [\tau_{z_i} S_{i35} + \theta_{x_i} S_{i45} + \theta_{y_i} S_{i55}] \vec{i}_y \\ \vec{M}_{hs2} &= \theta_i \wedge \vec{M}_{hs1} + [S_{i34} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i44} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i45} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_x \\ &\quad + [S_{i35} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i45} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i55} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_y \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{hd1} = \rho \iint_{\Sigma_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} dS$$

$$\vec{F}_{hd2} = \theta_i \wedge \vec{F}_{hd1} + \rho \iint_{\Sigma_i} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 P \text{ grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} + F_2 \right] \vec{n} dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{n} dS$$

$$\vec{M}_{hd1}(O') = \rho \iint_{\Sigma_i} \frac{\partial \phi}{\partial t} (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS$$

$$\vec{M}_{hd2}(O') = \theta_i \wedge \vec{F}_{hd1} + \rho \iint_{\Sigma_i} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 P \text{ grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} + F_2 \right] \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} dS$$

où :

$$\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_i^* \cos \omega t + \vec{\theta}_i^{**} \sin \omega t$$

représente le vecteur rotation de composantes $(\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz})$ et

$$\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i^* \cos \omega t + \vec{\tau}_i^{**} \sin \omega t$$

le vecteur translation $(\tau_{ix}, \tau_{iy}, \tau_{iz})$.

ζ est la hauteur de vagues à la flottaison au premier ordre :

$$\zeta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Z étant le déplacement vertical d'un point de la flottaison.

z_F étant la cote du point de calcul des efforts O .

\vec{PoP} est le vecteur déplacement d'un point du corps par rapport à sa position de repos.

Les transports des moments en un point O fixe s'effectuent par :

$$\vec{M}_{hs_2}(O) = \vec{M}_{hs_2}(O') + \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{hs_1}$$

$$\vec{M}_{hd_2}(O) = \vec{M}_{hs_2}(O') + \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{hd_1}$$

auxquels il faut rajouter les efforts de liaison du premier ordre dus aux ancrages :

$$\vec{F}_{L_{i1}} = \vec{F}_{L_i}$$

$$\vec{F}_{L_{i2}} = \vec{\theta}_i \wedge \vec{F}_{L_{i1}}$$

$$\vec{M}_{L_{i1}} = \vec{M}_{L_i}$$

$$\vec{M}_{L_{i2}}(O) = \vec{\theta}_i \wedge \vec{M}_{L_{i1}}$$

ainsi que leur transport en un point O fixe :

$$\vec{M}_{L_{i2}}(O) = \vec{M}_{L_{i2}}(O') + \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{L_{i1}}$$

L'ensemble des efforts du premier ordre sur le corps i est égal aux efforts d'inertie, qui s'écrivent d'après (1.116) :

$$(2.142) \quad \begin{pmatrix} \vec{F}_{M_i} \\ \vec{M}_{M_i} \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \vec{P}_i \\ \vec{T}_i \\ -\vec{T}_i \\ \vec{I}_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vec{\tau}_i \\ \vec{\theta}_i \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, les efforts de dérive sur le corps i sont donnés par les expressions suivantes :

$$(2.143) \quad \left. \begin{aligned} \text{a) } \vec{F}_{\text{der}_i} = & \left\langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{F}_{M_i} + \left[S_{i33} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_P - S_{i34} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i35} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2} \right] \vec{i}_z \right. \\ & \left. + \rho \iint_{\Sigma_i} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 P \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi + F_2 \right] \vec{n} \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{n} \, d\Gamma \right\rangle \end{aligned} \right|$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{M}_{\text{der}_i}(\text{O}') &= \langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{M}_{M_i} + [S_{i34} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i44} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i45} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_x \\
 &\quad + [S_{i35} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i45} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i55} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_y \\
 &\quad + \rho \iint_{\Sigma_i} [\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 P \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi + F_2] \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} \, d\Gamma \rangle
 \end{aligned}$$

Les transports du moment de dérive en un point O fixe étant donnés par :

$$(2.143) \text{ c) } \vec{M}_{\text{der}_i}(\text{O}) = \vec{M}_{\text{der}_i}(\text{O}') + \langle \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{M_i} \rangle$$

le symbole $\langle \rangle$ désignant la valeur moyenne temporelle :

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

Les termes nécessaires pour calculer ces expressions ne sont pas tous connus par la résolution des problèmes précédents. En effet, si l'on connaît la vitesse normale sur le corps par la condition de glissement, on ne connaît pas séparément ses composantes, donc son module, par ailleurs, la hauteur de vagues à la flottaison n'est pas intervenue dans la résolution des problèmes précédents.

Cette hauteur de vagues peut être déterminée aisément en calculant le potentiel dans le plan de la surface libre. Il n'en est pas de même de la cinématique sur le corps dans le domaine fluide lorsque le problème hydrodynamique a été résolu à l'aide d'une distribution mixte de Green, le calcul des vitesses par les formules (2.75) nécessitant pratiquement de résoudre un problème hydrodynamique supplémentaire. Il peut être intéressant de résoudre ce problème, non avec une distribution mixte de Green mais avec la distribution de sources cinématiquement équivalente aux carènes en mouvement, ce qui donne en général une meilleure précision sur la détermination des vitesses. On aura donc à résoudre l'équation intégrale supplémentaire :

$$(2.144) \quad \frac{\tilde{\sigma}(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \tilde{\sigma}(M') \tilde{K}(M, M') \, dS(M') = \vec{V}_{E_i} \cdot \vec{n} |_{\Sigma_i} - a \frac{\partial \phi'_I}{\partial n} \quad i=1,2,\dots,N$$

où les termes \vec{V}_{E_i} désignent la vitesse complexe des mouvements du corps i.

Les composantes des vitesses sur le corps seront alors obtenues à partir des formules (2.74). La méthode de calcul des efforts de dérive par intégration des pressions a été utilisée initialement par J.A. Pinkster et G. Van Oortmerssen

[98][99], puis par B. Molin [90] qui a ajouté la constante de l'équation de Lagrange dans la formulation et M. Le Boulluec [82] dans le cas d'un seul corps, la formulation a ensuite été généralisée pour tenir compte des interactions entre corps [23].

2.9.3 Formules de Maruo-Newman :

Les formules établies par H. Maruo en 1960 [87], complétées par N. Newman en 1967 [92] permettent de calculer la résultante des efforts horizontaux de dérive ainsi que le moment résultant de dérive d'axe vertical sur un ensemble de corps par application du théorème des quantités de mouvement.

Pour démontrer ces formules, nous appliquerons le théorème des quantités de mouvement dans le volume fluide limité par la surface libre SL, les carènes mobiles Σ , le fond horizontal F et une surface à l'infini constituée d'un cylindre fixe d'axe vertical et de rayon R très grand Σ_{∞} .

Dans ce volume, le théorème des quantités de mouvement s'écrit, en variables d'Euler :

- pour les forces :

$$(2.145, a) \quad \Sigma \vec{F}_e = \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_{\infty}} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \vec{V} dD$$

- pour les moments par rapport à un point O fixe :

$$(2.145, b) \quad \Sigma \vec{M}_e = \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_{\infty}} \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V}) dD$$

où $\Sigma \vec{F}_e$ et $\Sigma \vec{M}_e$ sont la somme de toutes les forces et moments extérieurs exercés sur le fluide, \vec{n} étant la normale extérieure au domaine D.

Les forces et les moments extérieurs sont les forces de pression et les forces de pesanteur, on a donc :

$$\Sigma \vec{F}_e = - \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_\infty} p \cdot \vec{n} \, dS - \iiint_D \rho g \vec{i}_z \, dD$$

et

$$\Sigma \vec{M}_e = - \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_\infty} p \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{n}) \, dS - \iiint_D \rho g (\vec{OM} \wedge \vec{i}_z) \, dD$$

La résultante des forces de dérive horizontales et le moment résultant d'axe vertical sur l'ensemble des corps sont donnés par :

$$(2.146) \left\{ \begin{array}{l} \langle F_x \rangle_y = \langle \iint_{\Sigma} p \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \, dS \rangle \\ \langle M_z \rangle = \langle \iint_{\Sigma} p \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{i}_z \, dS \rangle \end{array} \right.$$

où le symbole $\langle \rangle$ désigne la moyenne temporelle.

Si l'on ne s'intéresse qu'à ces trois composantes, on déduit des équations précédentes :

$$F_x = - \iint_{SL+F+\Sigma_\infty} p \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \, dS - \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_\infty} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i}_x \, dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \vec{V} \cdot \vec{i}_x \, dD$$

$$M_z = - \iint_{SL+F+\Sigma_\infty} p (\vec{OM} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{i}_z \, dS - \iint_{\Sigma+SL+F+\Sigma_\infty} \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V}) (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i}_z \, dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{i}_z \, dD$$

puisque les composantes horizontales et le moment d'axe vertical dus à la pesanteur sont nuls.

Sur le fond, la normale $\vec{n} = - \vec{i}_z$. Sur les surfaces Σ , SL et F , les conditions de glissement imposent $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$. Il reste donc, en prenant la pression à la surface libre comme origine :

$$F_{xy} = - \iint_{\Sigma_{\infty}} [p \cdot \vec{n} + \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] \vec{i}_x \cdot \vec{i}_y dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho \vec{V} \cdot \vec{i}_x dD$$

$$M_z = - \iint_{\Sigma_{\infty}} [p(\vec{OM} \wedge \vec{n}) + \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{n})] \vec{i}_z dS - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V}) \vec{i}_z dD$$

Si l'on s'intéresse à la moyenne temporelle de ces grandeurs, l'intégrale de volume disparaît puisque les vitesses sont des fonctions sinusoïdales du temps. Il vient :

$$(2.147) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle F_{xy} \rangle = - \langle \iint_{\Sigma_{\infty}} [p \cdot \vec{n} + \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})] \vec{i}_x \cdot \vec{i}_y dS \rangle \\ \langle M_z \rangle = - \langle \iint_{\Sigma_{\infty}} [p(\vec{OM} \wedge \vec{n}) + \rho (\vec{OM} \wedge \vec{V})(\vec{V} \cdot \vec{n})] \vec{i}_z dS \rangle \end{array} \right.$$

Pour continuer le calcul, nous allons exprimer les intégrales sur Σ_{∞} en coordonnées cylindriques, puis nous utiliserons les formules donnant le comportement à l'infini d'une distribution de singularités pour déterminer les efforts du second ordre.

En coordonnées cylindriques (R, θ, Z) sur Σ_{∞} , on a :

$$\vec{n} \cdot \vec{i}_x = \cos \theta, \quad \vec{n} \cdot \vec{i}_y = \sin \theta, \quad \vec{e}_R = \vec{i}_x \cos \theta + \vec{i}_y \sin \theta$$

$$\vec{OM} = R \vec{e}_R + z \vec{e}_z, \quad \vec{n} = \vec{e}_R, \quad \vec{e}_\theta = -\vec{i}_x \sin \theta + \vec{i}_y \cos \theta$$

$$\vec{V} = V_R \vec{e}_R + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z, \quad \vec{e}_z = \vec{i}_z$$

$$V_R = \frac{\partial \phi}{\partial R}, \quad V_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$dS = R d\theta dz, \quad \vec{i}_x = \vec{e}_R \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta, \quad \vec{i}_y = \vec{e}_R \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta$$

Il vient alors :

$$(2.148) \quad \langle F_x \rangle = - \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} [p \cos \theta + \rho V_R (V_R \cos \theta - V_\theta \sin \theta)] R dz d\theta \right\rangle$$

$$(2.149) \quad \langle F_y \rangle = - \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} [p \sin \theta + \rho V_R (V_R \sin \theta + V_\theta \cos \theta)] R dz d\theta \right\rangle$$

$$(2.150) \quad \langle M_z \rangle = - \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} \rho V_R (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) V_\theta R^2 dz d\theta \right\rangle = - \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} \rho V_R V_\theta R^2 dz d\theta \right\rangle$$

Sur le cylindre Σ_∞ : $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, le potentiel lointain s'exprime par:

$$(2.151) \quad \tilde{\phi} = \tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_d$$

avec :

$$(2.152) \quad \tilde{\phi}_I = -a \omega \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{m_0 \text{sh } m_0 h} e^{i m_0 R \cos(\theta-\beta)}$$

et :

$$(2.153) \quad \tilde{\phi}_d = f(m_0) \tilde{H}(\theta) \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{sh } m_0 h} \frac{1}{\sqrt{R}} e^{i(m_0 R + \frac{\pi}{4})}$$

$$(2.154) \quad f(m_0) = \sqrt{8\pi m_0} \frac{(k_0 h)^2}{m_0 h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]}$$

où :

$$(2.155) \quad \tilde{H}(\theta) = \frac{-1}{4\pi \text{sh } m_0 h} \iint_{\Sigma} \left(\tilde{\sigma} + \mu \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \right) \text{ch } m_0(z'+h) e^{-im_0(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M')$$

$\tilde{H}(\theta)$ est la fonction de Kochin complexe de la distribution de singularités cinématiquement équivalente aux carènes en mouvement obtenue à partir de la solution des problèmes élémentaires de radiation, de diffraction et des mouvements. On a :

- pour une distribution mixte de Green :

$$(2.156) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma} = \sum_{q=1}^6 \tilde{V}_{E_i}^q \cdot \vec{n} - a \frac{\partial \tilde{\phi}'_I}{\partial n} \quad i=1,2,\dots,N \\ \tilde{\mu} = a \mu'_D + \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^6 \mu_{R_i}^q \tilde{A}_i \end{array} \right.$$

où \tilde{A}_i^q et $\tilde{V}_{E_i}^q$ sont les amplitudes et les vitesses du mouvement q du corps i , $\tilde{\mu}'_D$ est la densité de doublets solution du problème de diffraction et $\tilde{\mu}^q_{R_i}$ la densité de doublets solution du problème de radiation pour le mouvement q du corps i .

- pour une distribution de sources :

$$(2.157) \quad \tilde{\sigma} = a \tilde{\sigma}'_D + \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^6 \tilde{\sigma}_{R_i}^q \tilde{A}_i^q$$

La solution $\tilde{\sigma}$ obtenue par sommation est identique à la solution de l'équation intégrale (2.144).

Si l'on exprime la dépendance en z des potentiels et des vitesses issus des formules (2.152) et (2.153), après avoir posé :

$$c(z) = \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h}$$

et

$$s(z) = \frac{\text{sh } m_0(z+h)}{\text{sh } m_0 h}$$

On a :

$$\tilde{\phi} = c(z) \tilde{\phi}^\circ$$

$$\tilde{V}_R = c(z) \tilde{V}_R^\circ$$

$$\tilde{V}_\theta = c(z) \tilde{V}_\theta^\circ$$

$$\tilde{V}_z = s(z) \tilde{V}_z^\circ$$

où la notation $^\circ$ indique la valeur des quantités en $z=0$.

Les produits de grandeurs dans les formules (2.148), (2.149) et (2.150) font intervenir le carré des fonctions $c(z)$ et $s(z)$ dont l'intégration en z est immédiate.

$$(2.158) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(m_0, k_0) = \int_{-h}^0 [c(z)]^2 dz = \frac{1}{2m_0} \left[\frac{(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h}{m_0 h} \right] \\ B(m_0, k_0) = \int_{-h}^0 [s(z)]^2 dz = \frac{1}{2k_0} \left[\frac{k_0 h - (m_0 h)^2 + (k_0 h)^2}{k_0 h} \right] \end{array} \right.$$

D'où les relations :

$$(2.159) \quad m_0^2 A(m_0, k_0) - k_0^2 B(m_0, k_0) = h(m_0^2 - k_0^2)$$

$$(2.160) \quad -m_0^2 A(m_0, k_0) - k_0^2 B(m_0, k_0) = -k_0$$

Forces de dérive horizontales :

Nous allons utiliser ces résultats pour expliciter les termes donnant les forces horizontales.

La pression p dans le domaine fluide est donnée par l'équation de Lagrange :

$$(2.161) \quad p = -\rho \operatorname{Re}(-i\omega \tilde{\phi} e^{-i\omega t}) - \frac{1}{2} \rho |\tilde{V}|^2 - \rho g z$$

Son intégration en z donne, en négligeant les termes en $\phi^{(3)}$:

$$(2.162) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-h}^{\zeta} p \, dz = -\frac{1}{2} \rho g z^2 \Big|_{-h}^{\zeta} + \operatorname{Re} \frac{i\omega}{m_0} \frac{\operatorname{sh} m_0(z+h)}{\operatorname{ch} m_0 h} \tilde{\phi}^{\circ} e^{-i\omega t} \Big|_{-h}^{\zeta} \\ -\frac{\rho}{2} A(m_0, k_0) [|\tilde{V}_{R}^{\circ}|^2 + |\tilde{V}_{\theta}^{\circ}|^2] - \frac{\rho}{2} B(m_0, k_0) |\tilde{V}_{z}^{\circ}|^2 \\ \text{avec } \zeta = \operatorname{Re} \frac{i\omega}{g} \tilde{\phi}^{\circ} e^{-i\omega t} \end{array} \right.$$

La contribution du premier terme est nulle après intégration en θ pour $\langle F_x \rangle$ et $\langle F_y \rangle$, il en est de même pour la valeur moyenne du deuxième terme.

On peut exprimer les vitesses sur le cylindre Σ_{∞} par :

$$(2.163) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{V}_{R_I}^{\circ} = i m_0 \cos(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^{\circ} & \tilde{V}_{R_d}^{\circ} = i m_0 \tilde{\phi}_d^{\circ} \\ \tilde{V}_{\theta_I}^{\circ} = -i m_0 \sin(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^{\circ} & \tilde{V}_{\theta_d}^{\circ} = \frac{1}{R} \frac{\dot{H}(\theta)}{\tilde{H}(\theta)} \tilde{\phi}_d^{\circ}, \quad \dot{H}(\theta) = \frac{d\tilde{H}(\theta)}{d\theta} \\ \tilde{V}_{z_I}^{\circ} = k_0 \tilde{\phi}_I^{\circ} & \tilde{V}_{z_d}^{\circ} = k_0 \tilde{\phi}_d^{\circ} \end{array} \right.$$

En écrivant la valeur moyenne de deux quantités complexes sous la forme (2.79):

$$\langle \tilde{A} \tilde{B} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{A} \bar{\tilde{B}}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{\tilde{A}} \tilde{B}) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\tilde{A} \bar{\tilde{B}} + \bar{\tilde{A}} \tilde{B})$$

où la barre désigne la quantité complexe conjuguée, on peut exprimer l'intégrale donnant les forces horizontales après intégration en z et séparation des termes en $\tilde{\phi}_I^\circ$ et $\tilde{\phi}_d^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \langle F_x \rangle_y &= \frac{-\rho}{4} \int_0^{2\pi} \{ \{ k_0 (\tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ)(\bar{\phi}_I^\circ + \bar{\phi}_d^\circ) - m_0^2 A(m_0, k_0) \{ [\cos(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ \\
 &+ \tilde{\phi}_d^\circ] [\cos(\theta - \beta) \bar{\phi}_I^\circ + \bar{\phi}_d^\circ] \\
 &+ [\sin(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ + \frac{1}{R} \frac{\dot{H}(\theta)}{\bar{H}(\theta)} \tilde{H}_d^\circ] [\sin(\theta - \beta) \bar{\phi}_I^\circ + \frac{1}{R} \frac{\dot{H}(\theta)}{\bar{H}(\theta)} \bar{\phi}_d^\circ] \\
 &- k_0^2 B(m_0, k_0) (\tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ)(\bar{\phi}_I^\circ + \bar{\phi}_d^\circ) \} \} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} R d\theta \\
 &+ \frac{-\rho}{4} \int_0^{2\pi} \{ 2 m_0^2 A(m_0, k_0) [\cos(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ] [\cos(\theta - \beta) \bar{\phi}_I^\circ + \bar{\phi}_d^\circ] \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &+ 2 m_0^2 [\cos(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ] [\sin(\theta - \beta) \bar{\phi}_I^\circ + \frac{1}{R} \frac{\dot{H}(\theta)}{\bar{H}(\theta)} \bar{\phi}_d^\circ] \} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} R d\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.164}$$

L'intégration peut être poursuivie en utilisant la méthode de la phase stationnaire décrite dans l'annexe 4 en gardant dans les développements les termes principaux.

Les intégrales figurant dans les expressions précédentes sont du type :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i [m_0 R \cos(\theta - \beta) - m_0 R - \frac{\pi}{4}]} d\theta \quad I_2 = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i [m_0 R \cos(\theta - \beta) - m_0 R - \frac{\pi}{4}]} d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i R g(\theta)} d(\theta) \quad I_2 = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i R g(\theta)} d(\theta)$$

$$g'(\theta) = -m_0 \sin(\theta - \beta) = 0$$

$$\text{pour } \theta = \beta \quad \text{et } \theta = \beta + \pi$$

$$g''(\theta) = -m_0 < 0 \text{ pour } \theta = \beta$$

$$g''(\theta) = m_0 > 0 \text{ pour } \theta = \beta + \pi$$

et leur parties principales pour $R \rightarrow \infty$ sont données par :

$$(2.165) \quad I_1 = f(\beta) \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{R}} + f(\beta+\pi) \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}} e^{-2im_0R} \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$(2.166) \quad I_2 = f(\beta) \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}} e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{R}} + f(\beta+\pi) \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}} e^{2im_0R} \frac{1}{\sqrt{R}}$$

On applique ces résultats dans l'équation donnant la valeur moyenne des forces.

Les termes quadratiques en $\tilde{\phi}_I^o$ sont indépendants de θ et leur intégration après multiplication par une fonction périodique donne une contribution nulle.

Dans les produits croisés $\tilde{\phi}_I^o \tilde{\phi}_d^o$ et $\tilde{\phi}_I^o \tilde{\phi}_d^o$, certains termes sont fonctions de $\sin(\theta-\beta)$, leur contribution est donc nulle puisque la phase des intégrales I_1 et I_2 est stationnaire pour $\theta=\beta$ et $\theta=\beta+\pi$. La contribution des termes principaux après intégration est :

$$\langle F_x \rangle_y = \frac{+\rho}{4} \frac{a \omega}{k_0} \frac{m_0}{k_0} \sqrt{8\pi m_0} \frac{(k_0 h)^2}{m_0 h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \sqrt{\frac{2\pi}{m_0}}$$

$$\{ f(\beta) [\tilde{H}(\beta) e^{-i\frac{\pi}{2}} + \tilde{H}(\beta) e^{i\frac{\pi}{2}}] + f(\beta+\pi) [\tilde{H}(\beta+\pi) e^{-2im_0R} + \tilde{H}(\beta+\pi) e^{2im_0R}] \}$$

avec :

$$f(\beta) = [k_0 + m_0^2 A(m_0, k_0) - k_0^2 B(m_0, k_0)] \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{h} [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h] \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

et

$$f(\beta+\pi) = [k_0 - m_0^2 A(m_0, k_0) - k_0^2 B(m_0, k_0)] \begin{pmatrix} \cos(\beta+\pi) \\ \sin(\beta+\pi) \end{pmatrix} = 0$$

d'où :

$$(2.167) \quad \langle F_x \rangle_y = -2\pi\rho a \omega \operatorname{Im} H(\beta) \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

La contribution des termes principaux quadratiques en ϕ_d se met sous la forme :

$$\langle F_x \rangle_y = \frac{-\rho}{4} \int_0^{2\pi} [k_0 + m_0^2 A(m_0, k_0) - k_0^2 B(m_0, k_0)] [f(m_0)]^2 \frac{m_0^2}{k_0^2} \tilde{H}(\theta) \tilde{H}(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

soit :

$$(2.168) \quad \langle F_x \rangle_y = -2 \pi \rho \frac{m_0 (k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\theta) \overline{\tilde{H}(\theta)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

On a donc :

$$(2.169) \quad \langle F_x \rangle_y = -2 \pi \rho \frac{m_0 (k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$- 2 \pi a \rho \omega \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \mathbf{Im} \tilde{H}(\beta)$$

L'intégrale peut être transformée compte tenu des propriétés de :

$$\tilde{H}(\theta) = H^*(\theta) + i H^{**}(\theta)$$

En effectuant le changement de variable θ en $\theta + \pi$, il vient :

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta = -2 \mathbf{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i [H^*(\theta) \overline{H^{**}(\theta)} - \overline{H^*(\theta)} H^{**}(\theta)] \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta$$

et :

$$i [H^*(\theta) \overline{H^{**}(\theta)} - \overline{H^*(\theta)} H^{**}(\theta)] = -2 \mathbf{Im} H^*(\theta) \overline{H^{**}(\theta)}$$

de sorte que l'on obtient finalement :

$$(2.170) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle F_x \rangle_y = -2 \pi a \rho \omega \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \mathbf{Im} [H^*(\beta) + i H^{**}(\beta)] - \\ \frac{8\pi\rho m_0 (k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \mathbf{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H^*(\theta) \overline{H^{**}(\theta)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \end{array} \right.$$

Moment de dérive d'axe vertical :

On appliquera le même principe pour calculer le moment d'axe vertical par rapport à un point O fixe. A partir de la formule (2.150), il vient :

$$(2.171) \left\{ \begin{aligned} \langle M_z \rangle &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} A(m_0, k_0) \frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial \theta} R^2 d\theta = \\ & -\frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} A(m_0, k_0) \left[\frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\phi}^\circ}{\partial R} \right] R^2 d\theta \end{aligned} \right.$$

Pour les termes quadratiques en $\tilde{\phi}_I^\circ$ et en $\tilde{\phi}_d^\circ$, on écrit $\langle M_z \rangle$ sous la forme :

$$(2.172) \left\{ \begin{aligned} \langle M_z \rangle &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} A(m_0, k_0) (-i m_0) [\cos(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ] \\ & [-i m_0 \sin(\theta - \beta) \tilde{\phi}_I^\circ + \frac{1}{R} \frac{\dot{H}(\theta)}{H(\theta)} \tilde{\phi}_d^\circ] R^2 d\theta \end{aligned} \right.$$

Le terme quadratique en $\tilde{\phi}_I^\circ$ donne une intégrale en $\sin 2(\theta - \beta)$ qui est nulle.

Le terme quadratique en $\tilde{\phi}_d^\circ$ s'explique sans difficulté par :

$$(2.173) \quad \langle M_z \rangle_d = -2\pi\rho \frac{(k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\theta) \dot{\tilde{H}}(\theta) d\theta$$

Les termes croisés ne peuvent être obtenus par la méthode de la phase stationnaire à partir de la formule (2.172) car la contribution du terme en $\beta + \pi$ ne s'annule pas.

Pour tourner cette difficulté, on écrit l'expression des produits croisés sous une forme symétrique, à partir de la deuxième égalité de (2.171). D'où :

$$\langle M_z \rangle_I = -\frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} A(m_0, k_0) \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_d^\circ}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\phi}_I^\circ}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{\phi}_I^\circ}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\phi}_d^\circ}{\partial \theta} \right] R^2 d\theta$$

et l'on intègre par parties le premier terme :

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_d^\circ}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\phi}_I^\circ}{\partial \theta} \right] R^2 d\theta = \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_d^\circ}{\partial R} \tilde{\phi}_I^\circ R^2 \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \tilde{\phi}_I^\circ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_d^\circ}{\partial R \partial \theta} R^2 d\theta$$

d'où :

$$\langle M_z \rangle_I = -\frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} A(m_0, k_0) \left[\frac{\partial \phi_I}{\partial R} \frac{\partial \phi_d}{\partial \theta} - \phi_I \frac{\partial^2 \phi_d}{\partial R \partial \theta} \right] R^2 d\theta$$

que l'on met sous la forme :

$$\langle M_z \rangle_I = -\frac{\rho a \omega}{4 m_0} \sqrt{\frac{8\pi}{m_0}} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} -i m_0 [\cos(\theta - \beta) + 1] \dot{H}(\theta) e^{-i[m_0 R \cos(\theta - \beta) - m_0 R - \frac{\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{R}} d\theta$$

Cette intégrale se calcule sans problème par la méthode de la phase stationnaire car le terme en $[1 + \cos(\theta - \beta)]$ est nul pour $\theta = \beta + \pi$. Il vient alors :

$$(2.174) \quad \langle M_z \rangle_I = 2\pi \frac{\rho a \omega}{m_0} \operatorname{Re} \dot{H}(\beta)$$

d'où le résultat final :

$$(2.175) \quad \langle M_z \rangle = 2\pi \frac{\rho a \omega}{m_0} \operatorname{Re} \dot{H}(\beta) - \frac{2\pi \rho (k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \dot{H}(\theta) \dot{H}(\theta) d\theta$$

On peut modifier cette expression comme précédemment en fonction de l'égalité :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} [\dot{H}^*(\theta) + i \dot{H}^{**}(\theta)] [\dot{H}(\theta) - i \dot{H}^{**}(\theta)] d\theta \\ = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \{ [\dot{H}^*(\theta) + i \dot{H}^{**}(\theta)] [\dot{H}(\theta) - i \dot{H}^{**}(\theta)] - [\dot{H}(\theta) - i \dot{H}^{**}(\theta)] [\dot{H}^*(\theta) + i \dot{H}^{**}(\theta)] \} d\theta \\ = -2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\dot{H}^{**}(\theta) \dot{H}(\theta) - \dot{H}^*(\theta) \dot{H}^{**}(\theta)] d\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$(2.176) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle M_z(O) \rangle &= \frac{2\pi}{m_0} a \rho \omega \operatorname{Re} [\dot{H}^*(\beta) + i \dot{H}^{**}(\beta)] + \\ &\frac{4\pi \rho (k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\dot{H}^{**}(\theta) \dot{H}(\theta) - \dot{H}^*(\theta) \dot{H}^{**}(\theta)] d\theta \end{aligned} \right.$$

Il faut remarquer que l'expression obtenue pour le moment est valable par rapport à un point O fixe. Le transport en un point O' mobile s'effectue en appliquant la formule (2.143) :

$$(2.177) \quad \langle M_z(O') \rangle = \langle M_z(O) \rangle - \langle \tau_x F_{M_y} - \tau_y F_{M_x} \rangle$$

où τ_x et τ_y sont les translations au premier ordre, F_{M_x} et F_{M_y} étant les forces d'inertie au premier ordre.

Les expressions des forces et du moment sont identiques à celles obtenues par P. Guével et A. Grékas [54] [40] [58] en profondeur finie par application du théorème de Lagally.

Ces démonstrations généralisent celles effectuées par N. Newman en profondeur infinie [92].

La limite des expressions précédentes lorsque $h \rightarrow \infty$ est immédiate, il vient :

$$(2.178) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle F_x \rangle_y = 2 \pi a \rho \omega \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \text{Im} [H^*(\beta) + i H^{**}(\beta)] \\ - 8 \pi \rho k_0^2 \text{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H^*(\theta) \bar{H}^{**}(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \end{array} \right.$$

$$(2.179) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle M_z \rangle = 2 \pi a \rho \frac{\omega}{k_0} \text{Re} [\dot{H}^*(\beta) + i \dot{H}^{**}(\beta)] + \\ 4 \pi \rho k_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [H^{**}(\theta) \dot{H}^*(\theta) - H^*(\theta) \dot{H}^{**}(\theta)] d\theta \end{array} \right.$$

avec :

$$(2.180) \quad \tilde{H}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\tilde{\sigma} + \mu \frac{\partial}{\partial n_{M'}}) e^{k_0 [z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} dS(M') \quad ; \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g}$$

Puissance moyenne transmise au fluide :

La puissance moyenne transmise au fluide intérieur à travers la surface Σ_∞ est donnée par :

$$P_H = - \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} p. (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \right\rangle$$

soit :

$$P_H = - \rho \left\langle \iint_{\Sigma_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t} V_R dS \right\rangle$$

et d'après (2.161) et (2.163) :

$$P_H = - \rho \frac{\omega}{2} m_0 \operatorname{Re} \iint_{\Sigma_\infty} (\tilde{\phi}_I + \tilde{\phi}_d) [\tilde{\phi}_I \cos(\theta - \beta) + \tilde{\phi}_d] dS$$

En commençant par intégrer en z , il vient :

$$P_H = - \rho \frac{\omega}{2} m_0 \operatorname{Re} A(m_0, k_0) \int_0^{2\pi} [(\tilde{\phi}_I^\circ \tilde{\phi}_I^\circ \cos(\theta - \beta) + \tilde{\phi}_I^\circ \tilde{\phi}_d^\circ \cos(\theta - \beta) + \tilde{\phi}_d^\circ \tilde{\phi}_I^\circ + \tilde{\phi}_d^\circ \tilde{\phi}_d^\circ)] R d\theta$$

La contribution des termes en $\tilde{\phi}_I^\circ \tilde{\phi}_I^\circ$ est nulle pour les mêmes raisons que précédemment.

$$P_H = - \rho \frac{\omega}{2} m_0 A(m_0, k_0) \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [(\tilde{\phi}_d^\circ \tilde{\phi}_d^\circ + [1 + \cos(\theta - \beta)] \tilde{\phi}_I^\circ \tilde{\phi}_d^\circ)] R d\theta$$

d'où :

$$P_H = - 2 \pi \rho \omega \frac{(k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 d\theta +$$

$$\frac{\rho a \omega^2}{4 m_0} \sqrt{8\pi m_0} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\theta) [1 + \cos(\theta - \beta)] e^{-i [m_0 R \cos(\theta - \beta) - m_0 R - \frac{\pi}{4}]} R d\theta$$

Et après intégration de la seconde intégrale par la méthode de la phase stationnaire :

$$(2.181) \quad P_H = -2 \pi \rho \omega \frac{(k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 d\theta - 2\pi \frac{\rho a \omega^2}{m_0} \operatorname{Im} \tilde{H}(\beta)$$

Cette formule permet d'exprimer la puissance moyenne fournie au fluide intérieur, donc au flotteur, à l'aide des fonctions de Kochin.

Propriété des forces de dérive :

Considérons la force de dérive dans le sens de propagation de la houle :

$$\langle F_\beta \rangle = \langle F_x \rangle \cos \beta + \langle F_y \rangle \sin \beta$$

Soit :

$$\langle F_\beta \rangle = - \frac{2 \pi \rho m_0 (k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 \cos(\theta - \beta) d\theta - 2\pi a \rho \omega \operatorname{Im} \tilde{H}(\beta)$$

et si l'on exprime $\operatorname{Im} \tilde{H}(\beta)$ en fonction de P_H , il vient :

$$\langle F_\beta \rangle = \frac{2 \pi \rho m_0 (k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 [1 - \cos(\theta - \beta)] d\theta + \frac{m_0}{\omega} P_H$$

La puissance fournie au flotteur par le fluide est a priori de signe quelconque.

Le terme fonction des mouvements du flotteur s'écrit :

$$\langle F_\beta \rangle_H = \frac{2 \pi \rho m_0 (k_0 h)^2}{h[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(\theta)|^2 [1 - \cos(\theta - \beta)] d\theta$$

de sorte que :

$$\langle F_\beta \rangle_H \geq 0$$

Ceci entraîne, qu'en l'absence de dispositif extérieur au fluide fournissant de l'énergie au flotteur, celui-ci se déplace dans le sens de propagation de la houle incidente [58]. Cette propriété constitue un test numérique de bonne résolution de l'ensemble des problèmes hydrodynamiques.

Bilan des résultats obtenus à l'aide des formules de Maruo-Newman:

Dans le cas d'un seul flotteur, les formules de Maruo-Newman permettent d'obtenir les forces horizontales et le moment d'axe vertical de dérive à l'aide des fonctions de Kochin.

En l'absence de liaison ou dans le cas de liaisons purement élastiques, elles permettent de montrer que la force moyenne exercée sur le flotteur est dirigée dans le sens de propagation de la houle incidente.

Dans le cas d'un système composé de plusieurs corps, les formules précédentes ne permettent pas de séparer la contribution de chaque corps, aussi nous n'utiliserons les formules de Maruo-Newman que comme vérification numérique de la résultante des forces horizontales et du moment d'axe vertical calculés par une autre méthode.

Enfin, il faut remarquer que l'utilisation des fonctions de Kochin entraîne l'obligation d'avoir résolu les problèmes hydrodynamiques de radiation et de diffraction pour connaître les singularités cinématiquement équivalentes aux corps en mouvement. En particulier, le fait de résoudre le problème de diffraction par les formules d'Haskind ne permet pas d'obtenir les efforts de dérive.

2.9.4 Conclusion :

Les efforts constants du second ordre dus aux potentiels du premier ordre peuvent être exprimés simplement après résolution des problèmes hydrodynamiques et mécanique. La formulation par intégration des pressions donne tous les efforts (3 forces, 3 moments) sur chaque corps d'un système au prix de la résolution d'un problème hydrodynamique supplémentaire. Les formules de Maruo-Newman expriment la résultante des efforts horizontaux et le moment résultant d'axe vertical sur un ensemble de corps lorsqu'on connaît les mouvements et les singularités solutions des problèmes de radiation et de diffraction. L'accord entre les deux formulations pour les efforts résultants constitue un excellent test numérique de la qualité de la résolution de l'ensemble des problèmes.

Chapitre 3 : RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DISCRETISE

INTRODUCTION :

Après avoir décrit la théorie permettant de résoudre le problème de diffraction-radiation par une méthode de singularités, il nous reste maintenant à résoudre numériquement ce problème. Pour ce faire, nous allons être amenés à choisir parmi les différentes possibilités s'offrant à chaque étape du calcul. Nous nous efforcerons de préciser les raisons de ces choix qui pourront être effectués suivant plusieurs critères : facilité de mise en oeuvre, précision des calculs, existence de formulations analytiques ou adéquation de la formulation au problème posé.

Nous avons choisi initialement de résoudre le problème de diffraction-radiation à l'aide d'une distribution mixte de Green, sources et doublets normaux, tout en calculant toutes les grandeurs nécessaires à la résolution du problème par une distribution de sources. Après discrétisation, les équations intégrales sont transformées en systèmes linéaires dont les éléments sont appelés coefficients d'influence. Ceux-ci sont intégrés analytiquement sur les facettes par rapport aux variables d'espace, ce qui en profondeur finie uniforme est facilité par la représentation d'une partie de la fonction de Green sous la forme d'une série tronquée d'exponentielles à parties réelles négatives. La validité de cette représentation est testée pour les cas usuels. Les coefficients d'influence sont connus après une intégration numérique dont on discute la précision. Après avoir posé les problèmes discrétisés de radiation et de diffraction en étudiant les simplifications apportées par les symétries éventuelles, nous comparons les méthodes de résolution des systèmes linéaires posés. Les équations du mouvement ayant été résolues, on peut avoir accès à certains efforts de dérive par les formules de Maruo-Newman, qui, comme les coefficients d'influence, ont été intégrées analytiquement sur les facettes. Le calcul de l'ensemble des efforts de dérive s'obtient par intégration des pressions lorsqu'on connaît la cinématique dans le fluide, ce qui pose un problème de précision pour les vitesses de doublets normaux. On résout alors un problème hydrodynamique supplémentaire à l'aide d'une distribution de sources, et l'on en déduit les vitesses sur le corps, les efforts complets de dérive et éventuellement la cinématique dans le fluide. Nous décrivons ensuite l'organisation du programme de calcul AQUADYN réalisé à partir de la formulation exposée.

3.1. CHOIX D'UNE METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME DISCRETISE :

Parmi l'infinité de distributions de singularités possibles pour résoudre les problèmes posés, nous avons déjà distingué, dans la formulation théorique, la distribution mixte de Green et la distribution de sources seules, le problème étant posé respectivement en termes de potentiels et en termes de vitesses. Il n'est pas possible de déterminer a priori quelle est la distribution donnant les meilleurs résultats. Néanmoins, par analogie avec le problème bidimensionnel [75][16], on peut prêter à la distribution mixte de Green les qualités suivantes : meilleure précision sur la détermination des efforts hydrodynamiques pour une discrétisation donnée, probablement due au fait que les inconnues du problème sont directement les pressions hydrodynamiques; moindre sensibilité à la discrétisation autour des arêtes vives, où les vitesses tendent vers l'infini lorsqu'on raffine la discrétisation, et influence des fréquences irrégulières plus localisée.

Nous choisissons donc de poser le problème initial de diffraction-radiation avec la distribution mixte de Green. Cependant, compte tenu de la remarque du paragraphe 2.9 sur le calcul des vitesses lors de l'évaluation des efforts de dérive par intégration des pressions, nous nous réservons la possibilité de calculer toutes les grandeurs nécessaires à la résolution du problème par une distribution de sources seules.

Une fois la distribution de singularités choisie, l'étape suivante consiste à discrétiser le problème, c'est-à-dire à transformer le problème intégral continu en une suite finie de problèmes ponctuels suivant la méthode indiquée dans l'annexe 5. Cette méthode nécessite de discrétiser la surface des corps en facettes (quadrilatères plans ou non pouvant dégénérer en triangles sur lesquels sont réparties des densités de singularités) dont on doit calculer les caractéristiques géométriques principales (surface, normale, centre de gravité,...). Après discrétisation, les intégrales de surface intervenant dans les équations intégrales sont transformées en une somme d'intégrales de surface élémentaires sur chaque facette.

Les équations intégrales discrétisées s'écrivent donc, d'après (2.77)(2.78) et (A5.2), en notation complexe :

- Pour une distribution mixte de Green :

$$(3.1) \quad \frac{\tilde{\mu}_i}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\mu}_j \left[-\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{D}(M_i, M') dS(M') \right] = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_j} \left[\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \right]$$

- Pour une distribution de sources :

$$(3.2) \quad \frac{\tilde{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j \left[-\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{K}(M_i, M') dS(M') \right] = \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_i}$$

où N_1 est le nombre de facettes sur les corps discrétisés, σ_i et μ_i sont les densités complexes de sources et de doublets normaux sur la facette i et $\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_i}$ la vitesse normale complexe au point M_i .

$$(3.3) \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_i = \mu_i^* + i \mu_i^{**} \\ \tilde{\sigma}_i = \sigma_i^* + i \sigma_i^{**} \\ \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_i} = \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_i}^* + i \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n} \right)_{M_i}^{**} \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}(M_i, M') = S^*(M_i, M') + i S^{**}(M_i, M') \\ \tilde{D}(M_i, M') = \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \tilde{S}(M_i, M') \\ \tilde{K}(M_i, M') = \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} \tilde{S}(M_i, M') \end{array} \right.$$

On peut poser, pour $i \neq j$:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \\ \tilde{D}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{D}(M_i, M') dS(M') = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \\ \tilde{K}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \tilde{K}(M_i, M') dS(M') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} \iint_{s_j} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \end{array} \right.$$

et pour $i=j$:

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{ii} = \frac{1}{4\pi} \iint_{s_i} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \\ \tilde{D}_{ii} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_i} \tilde{D}(M_i, M') dS(M') = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_i} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \\ \tilde{K}_{ii} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_i} \tilde{K}(M_i, M') dS(M') = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} \iint_{s_i} \tilde{S}(M_i, M') dS(M') \end{array} \right.$$

Les coefficients \tilde{S}_{ij} , \tilde{D}_{ij} , \tilde{K}_{ij} sont appelés coefficients d'influence de la facette j au point M_i pour le potentiel des sources, des doublets normaux et les vitesses normales de sources.

Dans ces conditions, les équations intégrales sont transformées en équations linéaires, on a :

- Pour une distribution mixte de Green :

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^{N_1} \mu_j \tilde{D}_{ij} = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_e}{\partial n} \right)_{M_j} \tilde{S}_{ij}$$

- Pour une distribution de sources :

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j \tilde{K}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_e}{\partial n} \right)_{M_i}$$

Nous allons nous efforcer de mettre les coefficients \tilde{S}_{ij} , \tilde{D}_{ij} , \tilde{K}_{ij} sous une forme accessible au calcul numérique, compte tenu des expressions de \tilde{S} en profondeur infinie ou en profondeur finie uniforme.

3.2. CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DISCRETISES :

3.2.1. Principe de calcul des coefficients d'influence :

Les coefficients d'influence sont définis par l'intégrale sur la facette de la fonction de Green ou de ses dérivées normales. Sous sa forme la plus générale, compte tenu du choix qui a été fait pour exprimer les fonctions de Green, un coefficient d'influence C se présente comme l'intégrale sur une facette de la somme d'une fonction de $1/R$ (où R est la distance entre un point M' de la facette et un point quelconque) et d'une intégrale de $-\pi/2$ à $\pi/2$ d'une fonction de M'.

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = C_1 + C_2 \\ C_1 = \iint_s f \left(\frac{1}{MM'_1} \right) ds (M'_1) \quad M'_1 (x', y', z'_1) \\ C_2 = \iint_s \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g (M', \theta) d\theta \right] ds (M') \end{array} \right.$$

L'intégrale C_1 ne présente aucune difficulté de calcul pour les fonctions f usuelles.

Des expressions analytiques de ces intégrales ont été obtenues par J.L. Hess et A.M.O. Smith [68] en 1962 et P. Guével [44] en 1976. Les expressions exactes de ces intégrales ainsi que leurs développements asymptotiques sont donnés dans les paragraphes I à IV de l'annexe 6.

Le seul problème provient du terme C_2 qui se présente sous la forme d'une intégrale par rapport aux variables d'espace d'une fonction de M' connue sous la forme d'une intégrale en θ .

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour résoudre ce problème :

1°) Tabuler l'intégrale en θ , puis ensuite effectuer numériquement l'intégration par rapport aux variables d'espace sur la facette.

2°) Intégrer analytiquement par rapport aux variables d'espace, éventuellement en utilisant des formulations asymptotiques, puis effectuer numériquement l'intégration en θ .

La première méthode est initialement plus délicate à mettre en oeuvre, particulièrement en profondeur finie uniforme, puisqu'elle nécessite avant tout calcul l'étude des formulations numériques approchées de la fonction de Green, ainsi que leurs domaines de validité.

Nous avons choisi la seconde approche, principalement parce que nous avons déjà établi des formules permettant d'intégrer analytiquement les fonctions de θ sur une facette plane [45] [48] [21], mais aussi parce qu'il est plus facile de maîtriser la précision des méthodes numériques d'intégration sur une intégrale simple que sur une intégrale doublée. Les résultats obtenus par cette approche sont exposés dans les paragraphes suivants.

Pour expliciter les formules, nous utiliserons les conventions suivantes :

- Les notations correspondront à celles de l'annexe 6, on précisera seulement les fonctions particulières auxquelles s'appliquent les formules.

- Dans le cas où les formules sont dérivées de celles de l'annexe 6 on ne précisera que les transformations à apporter aux formules initiales pour obtenir les résultats cherchés.

Les coordonnées des sommets de la facette influençante j de centre de gravité $G(x_G, y_G, z_G)$, d'aire \mathcal{A} et de normale unitaire $\vec{n}(p, q, r)$ seront notées $M'_k(x'_k, y'_k, z'_k)$.

Le point influencé M_i aura pour coordonnées x_i, y_i, z_i , la normale unitaire à la surface en M_i sera notée $\vec{n}_{Mi}(p_i, q_i, r_i)$.

Nous allons donc donner les expressions des différents coefficients d'influence en profondeur infinie et en profondeur finie uniforme, intégrés sur la facette par rapport aux variables d'espace.

3.2.2. Coefficients d'influence du potentiel de sources en profondeur infinie :

Les coefficients S^* et S^{**} sont donnés par les formules (2.61) ou (2.62) et (2.63). Si l'on choisit les formules (2.62) et (2.63), ce que nous justifierons ultérieurement, le coefficient \tilde{S}_{ij} s'écrit :

$$(3.10) \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{4\pi} [S_{ij}^0 - S_{ij}^1 + \tilde{S}_{ij}^2]$$

avec :

$$(3.11) \left\{ \begin{array}{l} S_{ij}^0 = \iint_{s_j} \frac{1}{M_i M'} dS(M') \quad M' (x', y', z') \\ S_{ij}^1 = \iint_{s_j} \frac{1}{M_i M'_1} dS(M') \quad M'_1 (x', y', -z') \\ \tilde{S}_{ij}^2 = \frac{2k_0}{\pi} \iint_{s_j} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dJ(\zeta)}{d\zeta} d\theta \right\} dS(M') + 2ik_0 \iint_{s_j} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta \right\} dS(M') \end{array} \right.$$

$$\zeta = k_0 [z_i + z' + i [(x_i - x') \cos \theta + (y_i - y') \sin \theta]] , \quad k_0 = \omega^2 / g$$

a) L'expression S_{ij}^0 s'obtient directement à partir des résultats du paragraphe I de l'annexe 6.

b) L'expression S_{ij}^1 se calcule en faisant le changement de variable z' en $-z'$ sur la facette, ce qui revient à calculer les coefficients d'influence de la facette symétrique par rapport au plan $z=0$, en prenant garde au fait que la symétrie change le sens de parcours positif sur la facette. On changera donc z_G en $-z_G$, z'_k en $-z'_k$ et z'_{k+1} en $-z'_{k+1}$.

Après avoir calculé $R_0(-z_G)$, on aura :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.12) \quad S_{ij}^1 = \frac{\mathcal{A}}{R_0(-z_G)}$$

- Pour les formules exactes :

$$(3.13) \quad S_{ij}^1 = - \sum_{k=1}^m J_k^s(-z'_k, -z'_{k+1})$$

c) Le terme \tilde{S}_{ij}^2 se calcule, en utilisant les résultats du paragraphe V de l'annexe 6.

Posons :

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{ij}^2 = S_{ij}^{*2} + i S_{ij}^{**2} \\ S_{ij}^{*2} = \frac{2k_0}{\pi} \iint_{s_j} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dJ(\zeta)}{d\zeta} d\theta \right\} dS(M') \\ S_{ij}^{**2} = 2k_0 \iint_{s_j} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta \right\} dS(M') \end{array} \right.$$

- Formules exactes :

Compte tenu des propriétés de la fonction $J(\zeta)$ décrites dans l'annexe 3, on a :

$$(3.15) \quad S_{ij}^{*2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=1}^m A_k F_k d\theta$$

avec :

$$(3.16) \quad A_k = [(x'_{k+1} - x'_k) (q - i r \sin \theta) - (y'_{k+1} - y'_k) (p - i r \cos \theta)]$$

et

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_k = [J(\zeta_{k+1}) - J(\zeta_k) + \operatorname{Log} \left(\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} \right)] \frac{1}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ F_k = \frac{[J(\zeta_{k+1}) + J(\zeta_k)]}{2} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{array} \right.$$

t étant une tolérance numérique.

$$\zeta_k = k_0 [z_i + z'_k + i [(x_i - x'_k) \cos \theta + (y_i - y'_k) \sin \theta]]$$

de même :

$$(3.18) \quad S_{ij}^{**2} = 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=1}^m A_k G_k d\theta$$

avec :

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_k = \frac{e^{\zeta_{k+1}} - e^{\zeta_k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ G_k = \frac{e^{\zeta_{k+1}} + e^{\zeta_k}}{2} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{array} \right.$$

- Formules asymptotiques :

Pour des dimensions de facette faibles par rapport à la distance au point de calcul, on peut utiliser les formules asymptotiques suivantes :

$$(3.20) \quad \tilde{S}_{ij}^{*2} = \frac{2}{\pi} k_0 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right] d\theta$$

$$(3.21) \quad \tilde{S}_{ij}^{**2} = 2 k_0 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta$$

avec :

$$\zeta = k_0 [z_i + z_G + i [(x_i - x_G) \cos \theta + (y_i - y_G) \sin \theta]]$$

3.2.3. Coefficients d'influence du potentiel des doublets normaux en profondeur infinie :

Ces coefficients s'écrivent :

$$(3.22) \quad \tilde{D}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} [D_{ij}^0 + D_{ij}^1 + \tilde{D}_{ij}^2]$$

Les expressions de \tilde{D}_{ij} sont obtenues à partir des expressions correspondantes de \tilde{S}_{ij} issues des formules (2.61) et (2.63) dérivées sous le signe somme par rapport à la normale en M' . On a donc :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{ij}^0 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{M_i M'} dS(M') \quad M' (x', y', z') \\ D_{ij}^1 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{M_i M'_1} dS(M') \quad M'_1 (x', y', -z') \\ \tilde{D}_{ij}^2 = \frac{2k_0}{\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\zeta) d\theta \right\} dS(M') + 2 ik_0 \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\zeta} d\theta \right\} dS(M') \end{array} \right.$$

a) L'expression D_{ij}^0 est donnée directement par les résultats du paragraphe III de l'annexe 6.

b) L'expression D_{ij}^1 s'obtient de la même façon que S_{ij}^1 . On aura donc :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.24) \quad D_{ij}^1 = \mathcal{A} \frac{z_i + z_G}{[R_0(-z_G)]^3}$$

- Pour les formules exactes :

$$(3.25) \quad D_{ij}^1 = - \sum_{k=1}^m K_k (-z'_k, -z'_{k+1})$$

c) Le terme \tilde{D}_{ij}^2 est donné par les résultats du paragraphe VI de l'annexe 6 :

$$(3.26) \quad \tilde{D}_{ij}^2 = D_{ij}^{*2} + i D_{ij}^{**2}$$

- Formules exactes :

$$(3.27) \quad D_{ij}^{*2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=1}^m B_k F_k d\theta$$

avec :

$$(3.28) \quad B_k = -i [(x'_{k+1} - x'_k) \sin \theta - (y'_{k+1} - y'_k) \cos \theta]$$

et

$$(3.29) \quad D_{ij}^{**2} = 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=1}^m B_k G_k d\theta$$

La fonction F_k de la formule (3.27) est la même qu'en (3.17), ceci justifie le fait d'avoir employé les formules (2.62) et (2.63) pour \tilde{S}_{ij} et (2.61) et (2.63) pour \tilde{D}_{ij} , puisque l'utilisation d'une autre formulation aurait nécessité l'évaluation d'une fonction F'_k supplémentaire.

- Formules asymptotiques :

Dans les mêmes conditions que pour les sources, on peut établir les formules asymptotiques suivantes, puisque :

$$\frac{\partial}{\partial n_{M'}} = \left(p \frac{d\zeta}{dx'} + q \frac{d\zeta}{dy'} + r \frac{d\zeta}{dz'} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$(3.30) \quad D_{ij}^{*2} = \frac{2k_0^2}{\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r - i(p \cos \theta + q \sin \theta)] \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right] d\theta$$

$$(3.31) \quad D_{ij}^{**2} = 2k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [r - i(p \cos \theta + q \sin \theta)] e^{\zeta} d\theta$$

avec :

$$\zeta = k_0 [z_i + z_G + i[(x_i - x_G) \cos \theta + (y_i - y_G) \sin \theta]]$$

d) Cas particulier du coefficient \tilde{D}_{ii} :

Le coefficient \tilde{D}_{ii} nécessite un traitement particulier puisque M_i peut être égal à M' sur la facette. Pour ce terme, le coefficient D_{ii}^0 est identiquement nul dans le plan de la facette. En rajoutant la discontinuité de potentiel, le coefficient \tilde{D}_{ii} s'écrira :

$$(3.32) \quad \tilde{D}_{ii} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} [D_{ii}^1 + \tilde{D}_{ii}^2]$$

3.2.4. Coefficients d'influence des vitesses normales de sources en profondeur infinie :

Les coefficients d'influence des vitesses normales des sources s'obtiennent en dérivant par rapport à la normale en M_i les coefficients d'influence des potentiels de sources.

$$(3.33) \quad \tilde{K}_{ij} = - \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} \iint_{S_j} \tilde{S}_{ij} dS(M') = - \frac{1}{4\pi} [p_i \frac{\partial}{\partial x} + q_i \frac{\partial}{\partial y} + r_i \frac{\partial}{\partial z}] [S_{ij}^0 - S_{ij}^1 + \tilde{S}_{ij}^2]$$

$$(3.34) \quad \tilde{K}_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \{ p_i [V_{s_x}^0 - V_{s_x}^1 + \tilde{V}_{s_x}^2] + q_i [V_{s_y}^0 - V_{s_y}^1 + \tilde{V}_{s_y}^2] + r_i [V_{s_z}^0 - V_{s_z}^1 + \tilde{V}_{s_z}^2] \}$$

a) Les expressions $V_{s_x}^0, V_{s_y}^0, V_{s_z}^0$ sont obtenues directement par les résultats du paragraphe II de l'annexe 6.

b) Les expressions $V_{s_x}^1, V_{s_y}^1, V_{s_z}^1$ s'obtiennent en effectuant dans les formules les mêmes changements de variables que précédemment, ce qui donne :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.35) \quad \begin{cases} V_{s_x}^1 = \mathcal{A} \frac{x_G - x_i}{[R_0(-z_G)]^3} \\ V_{s_y}^1 = \mathcal{A} \frac{y_G - y_i}{[R_0(-z_G)]^3} \\ V_{s_z}^1 = \mathcal{A} \frac{-z_G - z_i}{[R_0(-z_G)]^3} \end{cases}$$

- Pour les formules exactes :

$$(3.36) \quad \begin{cases} V_{s_x}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_x} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{s_y}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_y} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{s_z}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_z} (-z'_k, -z'_{k+1}) \end{cases}$$

c) Posons :

$$(3.37) \quad \begin{cases} \tilde{V}_{s_x}^2 = V_{s_x}^{*2} + i V_{s_x}^{**2} \\ \tilde{V}_{s_y}^2 = V_{s_y}^{*2} + i V_{s_y}^{**2} \\ \tilde{V}_{s_z}^2 = V_{s_z}^{*2} + i V_{s_z}^{**2} \end{cases}$$

Les grandeurs cherchées s'obtiennent directement en dérivant les formules donnant \tilde{S}_{ij}^2 , compte tenu de :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} = i k_0 \cos \theta \frac{d}{d\zeta}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dy} = i k_0 \sin \theta \frac{d}{d\zeta}$$

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = k_0 \frac{d}{d\zeta}$$

- Formules exactes :

En appliquant ce principe pour les formules exactes, il vient :

$$(3.38) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^{*2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i k_0 \cos \theta) \sum_{k=1}^m A_k H_k d\theta \\ V_{s_y}^{*2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i k_0 \sin \theta) \sum_{k=1}^m A_k H_k d\theta \\ V_{s_z}^{*2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_0 \sum_{k=1}^m A_k H_k d\theta \end{array} \right.$$

avec :

$$(3.39) \left\{ \begin{array}{l} H_k = \frac{J(\zeta_{k+1}) - J(\zeta_k)}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ H_k = \frac{1}{2} \left[J(\zeta_{k+1}) + J(\zeta_k) - \frac{1}{\zeta_{k+1}} - \frac{1}{\zeta_k} \right] \quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{array} \right.$$

et :

$$(3.40) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^{**2} = 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i k_0 \cos \theta) \sum_{k=1}^m A_k G_k d\theta \\ V_{s_y}^{**2} = 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i k_0 \sin \theta) \sum_{k=1}^m A_k G_k d\theta \\ V_{s_z}^{**2} = 2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_0 \sum_{k=1}^m A_k G_k d\theta \end{array} \right.$$

Les coefficients A_k et G_k étant définis comme pour les coefficients d'influence du potentiel des sources par (3.16) et (3.19) .

- Formules asymptotiques :

On procède de même pour les formules asymptotiques :

$$(3.41) \left\{ \begin{aligned} V_{s_x}^{*2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i \cos \theta) \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\theta \\ V_{s_y}^{*2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i \sin \theta) \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\theta \\ V_{s_z}^{*2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[J(\zeta) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right] d\theta \end{aligned} \right.$$

$$(3.42) \left\{ \begin{aligned} V_{s_x}^{**2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i \cos \theta) e^\zeta d\theta \\ V_{s_y}^{**2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i \sin \theta) e^\zeta d\theta \\ V_{s_z}^{**2} &= \frac{2}{\pi} k_0^2 \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^\zeta d\theta \end{aligned} \right.$$

d) cas particulier du coefficient \tilde{K}_{ii} :

Le coefficient \tilde{K}_{ii} s'obtient en ajoutant la discontinuité de vitesse normale dans le calcul précédent. On peut aussi ajouter cette discontinuité dans le calcul des coefficients $V_{s_x}^0$, $V_{s_y}^0$, $V_{s_z}^0$, on aura alors :

$$(3.43) \quad \tilde{K}_{ii} = -\frac{1}{4\pi} \left[p_i (V_{s_x}^{0'} - V_{s_x}^1 + \tilde{V}_{s_x}^2) + q_i (V_{s_y}^{0'} - V_{s_y}^1 + \tilde{V}_{s_y}^2) + r_i (V_{s_z}^{0'} - V_{s_z}^1 + \tilde{V}_{s_z}^2) \right]$$

avec :

$$(3.44) \left\{ \begin{aligned} V_{s_x}^{0'} &= V_{s_x}^0 - 2\pi p_i \\ V_{s_y}^{0'} &= V_{s_y}^0 - 2\pi q_i \\ V_{s_z}^{0'} &= V_{s_z}^0 - 2\pi r_i \end{aligned} \right.$$

3.2.5. Utilisation du lissage par exponentielles pour le calcul de la fonction de Green en profondeur finie :

Reprenons les développements du paragraphe 2.2. Dans la méthode que nous avons choisie, il faut pouvoir représenter la fonction $F_1(k)$ à l'aide d'un développement

en série d'exponentielles. D'après (2.40), on a :

$$(3.45) \quad F_1(k) = \frac{(k+k_0) e^{kh}}{k \operatorname{sh} kh - k_0 \operatorname{ch} kh \pm i(0)} - \frac{A}{k - [m_0 \mp i(0)]}$$

avec :

$$(3.46) \quad A = \frac{1}{h} \frac{(m_0 h + k_0 h)^2}{[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]}$$

En posant : $K = kh$, $K_0 = k_0 h$, $M_0 = m_0 h$, $F_1(K)$ s'écrit :

$$(3.47) \quad F_1(K) = \frac{(K+K_0) e^K}{K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K \pm i(0)} - \frac{(M_0 + K_0)^2}{M_0^2 - K_0^2 + K_0} \frac{1}{K - [M_0 \mp i(0)]}$$

Pour évaluer cette expression, il faut d'abord connaître M_0 à partir de K_0 .

- Calcul de M_0 :

M_0 est la racine de l'équation :

$$(3.48) \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g} = m_0 \operatorname{th} m_0 h$$

ou bien :

$$(3.49) \quad K_0 = M_0 \operatorname{th} M_0$$

Cette équation n'admet qu'une seule racine $M_0 \geq K_0$.

La recherche de cette racine est effectuée par dichotomie après localisation de celle-ci sur le segment $[nL, (n+1)L]$, $n \geq 0$ et $L = \operatorname{Sup}(\sqrt{K_0}, K_0)$. Les deux valeurs possibles du pas de localisation permettent d'éviter une recherche trop longue lorsque $K_0 \rightarrow 0$. La précision choisie pour la détermination de l'intervalle final de la dichotomie est de 5.10^{-6} .

- Calcul de $F_1(K)$:

La fonction $F_1(K)$ peut s'écrire sous la forme :

$$(3.50) \quad F_1(K) = \frac{(K+K_0) (K-M_0) e^K (M_0^2 - K_0^2 + K_0) - (M_0 + K_0)^2 (K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K)}{(M_0^2 - K_0^2 + K_0) (K - M_0) (K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K)} = \frac{N}{D}$$

L'évaluation de cette fonction présente une difficulté puisque pour $K = M_0$, la fonction $F_1(K)$ se présente sous la forme indéterminée : $0/0$.

$$F_1(K) = N/D = 0/0.$$

On peut essayer de lever l'indétermination en utilisant la règle de L'Hôpital :

$$\frac{N'}{D'} = \frac{[(K+K_0)+(K-M_0)+(K+K_0)(K-M_0)] e^K (M_0^2 - K_0^2 + K_0) - (M_0 + K_0)^2 (K \operatorname{ch} K + \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{sh} K)}{(M_0^2 - K_0^2 + K_0) [K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K + (K-M_0)(K \operatorname{ch} K + \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{sh} K)]}$$

N' / D' se présente encore sous une forme indéterminée :

$$\frac{N'}{D'} \Big|_{K=M_0} = \frac{M_0 (K_0 + M_0) e^{M_0} - (M_0 + K_0)^2 \operatorname{ch} M_0}{M_0 (M_0 \operatorname{sh} M_0 - K_0 \operatorname{ch} M_0)} = \frac{0}{0}$$

On évalue alors N'' / D'' :

$$N'' = e^K [(K - M_0) + 2 + 2(K + K_0) + (K - M_0) + (K + K_0)(K - M_0)] (M_0^2 - K_0^2 + K_0) - (M_0 + K_0)^2 (K \operatorname{sh} K + 2 \operatorname{ch} K - K_0 \operatorname{ch} K)$$

$$D'' = 2(K \operatorname{ch} K + \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{sh} K) + (K - M_0)(K \operatorname{sh} K + 2 \operatorname{ch} K - K_0 \operatorname{ch} K)$$

$$(3.51) \quad F_1(M_0) = \frac{N''}{D''} \Big|_{K=M_0} = \frac{(M_0 + K_0)(M_0 + K_0 + 1)}{M_0^2 - K_0^2 + K_0} - \frac{M_0 (M_0 + K_0)^2}{(M_0^2 - K_0^2 + K_0)^2}$$

ce qui permet de lever l'indétermination.

Pour K voisin de M_0 , on remplace la fonction $F_1(K)$ par une parabole s'appuyant sur les 3 points suivants :

$$F_1(M_0 - L), F_1(M_0), F_1(M_0 + L)$$

avec :

$$L = \operatorname{Sup}(0,1; 0,1 \cdot M_0)$$

La fonction $F_1(K)$ est donc calculée :

- par la formule (3.50) en dehors du segment $[M_0 - L, M_0 + L]$

- par une interpolation parabolique à l'intérieur du segment $[M_0 - L, M_0 + L]$

Cette double représentation assure une bonne continuité de la fonction à lisser $F_1(K)$ pour toutes les valeurs de K , ainsi que nous pouvons le constater sur la figure 3.1 qui représente la fonction $F_2(K) = F_1(K) - 2$ pour des valeurs de $K_0 = 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$.

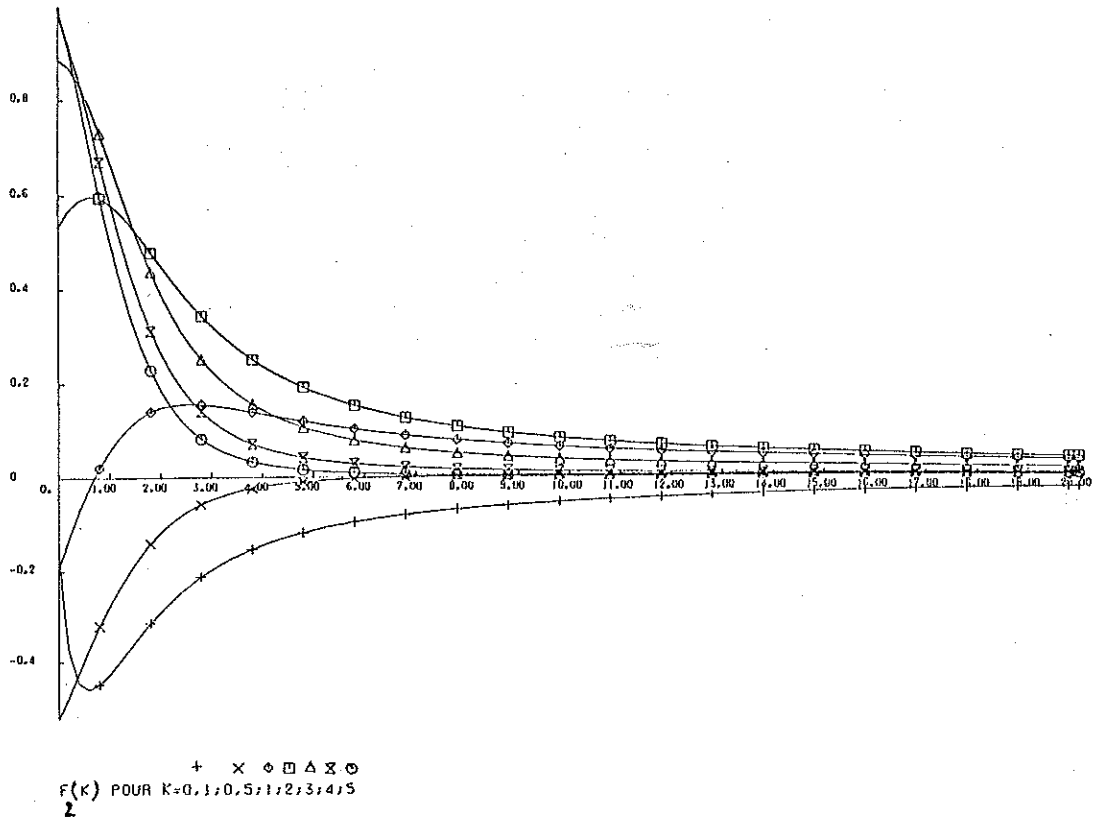


Figure 3.1

- Lissage de la fonction $F_2(K)$ par des séries d'exponentielles :

La technique de lissage de la fonction $F_2(K)$ par des séries d'exponentielles est due à J.C. Daubisse [16] [17]. On souhaite représenter la fonction $F_2(K)$ sous la forme :

$$(3.52) \quad F_2(K) = \sum_{n=1}^M a_n e^{\lambda_n K}$$

Le principe de la méthode est le suivant :

A partir de points équidistants de la fonction à lisser, on constitue à l'aide de la technique de Prony, un système surdéterminé réel que l'on résout au sens des moindres carrés par la méthode de Householder. Les solutions de ce système sont les coefficients d'un polynôme dont les racines sont liées aux exposants des exponentielles. Une fois déterminés les exposants des exponentielles, on élimine ceux qui ne remplissent pas les conditions souhaitées (exposants positifs ou égaux, exposants trop petits). Les exposants conservés constituent une sous-base de la base initiale. Il reste alors à déterminer les coefficients a_n des exponentielles.

Pour ce faire, on utilise une méthode de moindres carrés qui minimise l'écart entre la fonction à approximer et la série d'exponentielles choisie. Cette minimisation se

traduit par un système linéaire collocatif à coefficients réels qui est aussi résolu par la méthode de Householder et dont les solutions sont les coefficients cherchés.

La mise en oeuvre de cette méthode est la suivante :

a) On commence par choisir le nombre N d'exponentielles de départ. Ce nombre est initialement de 4.

b) La fonction $F_2(K)$ est alors calculée avec 4 fois plus d'intervalles P que d'exponentielles N ($P=4N$), ce qui d'après les essais numériques effectués, constitue un bon compromis permettant de bien représenter la fonction tout en évitant les instabilités. Cette fonction est calculée sur l'intervalle $[-0,1 ; 20]$, le fait de commencer le lissage en dehors du domaine d'étude permettant de bien représenter le comportement à l'origine de la fonction. On constitue alors un système surdéterminé ($4N, N$) qui est résolu par la méthode de Householder.

c) On construit le polynôme dont les coefficients sont les solutions du système et l'on calcule ses racines par la méthode de Bairstow, ce qui permet de déterminer les exposants λ_n des exponentielles, et l'on élimine les coefficients $\lambda_n \geq 0$ et $\lambda_n < -20$, le nombre d'exponentielles restantes est M .

d) On constitue le système (M,M) minimisant au sens des moindres carrés l'écart entre la fonction $F_2(K)$ et son développement en série de M exponentielles pour les $P+1$ points de calcul. Ce système s'obtient en minimisant la forme quadratique :

$$(3.53) \quad S = \sum_{i=1}^{P+1} [F_2(K_i) - \sum_{j=1}^M a_j e^{\lambda_j K_i}]^2$$

Après résolution par la méthode de Householder, on en déduit les M coefficients a_n .

e) On calcule alors l'écart maximum entre la fonction $F_2(K)$ et sa représentation par une série tronquée d'exponentielles sur le segment $[0, 20]$ avec 2 fois plus de points de calcul que pour le lissage, ce qui assure que l'écart est calculé non seulement aux points de minimisation, mais aussi au voisinage du milieu des segments. Si l'écart maximum est inférieur en module à 10^{-2} , l'approximation est retenue pour la suite des calculs, sinon on reprend les calculs en b) avec $N+2$ exponentielles jusqu'à ce que l'écart maxi soit inférieur à 10^{-2} . Le résultat de ces calculs pour des valeurs de $K_0 = 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$. sont présentés ci-dessous .

K0 = 1.000000E-01 M0 = 3.215959E-01 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H
PROFONDEUR TROP FAIBLE POUR LA LONGUEUR D'ONDE

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

4 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.122E+00 ECART MOYEN = -0.442E-02
6 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.704E-01 ECART MOYEN = 0.160E-02
6 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.287E-01 ECART MOYEN = -0.478E-03
8 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.703E-02 ECART MOYEN = 0.137E-03

0.1555692E+00EXP(-0.9455828E+01)
0.7308459E+00EXP(-0.1939648E+01)
0.3831308E-01EXP(-0.3366737E+01)
-0.6101131E+00EXP(-0.1083113E+01)
-0.4295465E-01EXP(-0.3149727E-01)
-0.3032635E+00EXP(-0.4972255E+00)
-0.1375277E+00EXP(-0.1784952E+00)
0.1950295E-01EXP(-0.2282169E+00)

K0 = 5.000008E-01 M0 = 7.717030E-01 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.433E-01 ECART MOYEN = -0.170E-02
5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.309E-02 ECART MOYEN = 0.825E-04

-0.6484404E+01EXP(-0.1753616E+01)
0.5507671E-02EXP(-0.2918916E-01)
-0.7301863E+00EXP(-0.1017747E+01)
-0.7793372E-01EXP(-0.4576145E+00)
0.6763340E+01EXP(-0.1767776E+01)

K0 = 1.000001E+00 M0 = 1.199679E+00 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.553E-01 ECART MOYEN = -0.221E-02
5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.773E-02 ECART MOYEN = 0.261E-03

0.4493396E+00EXP(-0.2224854E+01)
-0.9946346E+00EXP(-0.1386110E+01)
0.1543929E+00EXP(-0.4520144E+00)
0.1349587E+00EXP(-0.1724741E+00)
0.5057643E-01EXP(-0.3120353E-01)

K0 = 1.999997E+00 M0 = 2.065335E+00 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.331E-01 ECART MOYEN = 0.197E-02

5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.367E-01 ECART MOYEN = -0.644E-03

6 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.362E-02 ECART MOYEN = -0.418E-04

0.1578232E+00EXP(-0.2420238E+01)
-0.1083617E+01EXP(-0.1302307E+01)
0.2139612E+01EXP(-0.5646551E+00)
0.3193001E+00EXP(-0.2035070E+00)
-0.1063265E+01EXP(-0.4458007E+00)
0.6403768E-01EXP(-0.3589084E-01)

K0 = 3.000001E+00 M0 = 3.014483E+00 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.895E-01 ECART MOYEN = 0.478E-02

5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.255E-01 ECART MOYEN = -0.906E-03

6 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.534E-02 ECART MOYEN = -0.967E-04

0.3620655E+01EXP(-0.1070250E+01)
0.1466804E+00EXP(-0.6091225E+00)
0.1668969E+00EXP(-0.2321885E+00)
0.3131719E-01EXP(-0.4079216E-01)
0.3193818E+00EXP(-0.2118382E+01)
-0.3392860E+01EXP(-0.1376538E+01)

K0 = 3.999996E+00 M0 = 4.002666E+00 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.110E+00 ECART MOYEN = 0.613E-02

5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.573E-02 ECART MOYEN = -0.515E-04

-0.2183785E+01EXP(-0.1392894E+01)
-0.3803954E+01EXP(-0.7829102E+00)
0.9286432E-02EXP(-0.5992549E-01)
0.6791273E+01EXP(-0.9119820E+00)
0.1716497E+00EXP(-0.3038295E+00)

K0 = 4.999998E+00 M0 = 5.000452E+00 ADIMENSIONNALISES PAR RAPPORT A H

PROFONDEUR QUASI-INFINIE

LE PROGRAMME EN PROFONDEUR INFINIE SERAIT PLUS ADAPTE

CARACTERISTIQUES DU LISSAGE

3 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.558E-01 ECART MOYEN = 0.324E-02

4 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.179E-01 ECART MOYEN = -0.648E-03

5 EXPONENTIELLES ECART MAXI = 0.453E-02 ECART MOYEN = -0.299E-05

0.1926691E+02EXP(-0.9390645E+00)
0.6614134E-02EXP(-0.1316549E+00)
-0.3805655E+01EXP(-0.1363985E+01)
0.7569475E+01EXP(-0.7041419E+00)
-0.2203744E+02EXP(-0.8095551E+00)

On peut remarquer que ces exemples recouvrent en pratique toute la gamme possible des longueurs d'onde en profondeur finie, puisque $K_0 = 0,1$ correspond à une longueur d'onde de près de 20 fois la profondeur (par exemple une houle de 6 s de période pour une profondeur de 1 m), cas pour lequel le modèle de houle du premier ordre est insuffisant et $K_0 = 5$ correspond à une longueur d'onde de 1,25 fois la profondeur, ce qui peut être considéré comme une profondeur infinie.

La convergence de la méthode utilisée est bonne, le nombre moyen d'exponentielles nécessaires pour représenter la fonction est de l'ordre de 5, tandis que le maximum est de 8 aux grandes longueurs d'onde.

On peut noter que le fait d'augmenter le nombre d'exponentielles ne correspond pas forcément à un nombre plus grand d'exponentielles retenues, ni d'ailleurs à une précision plus grande. Dans ces résultats, en plus de l'écart maxi, nous avons fait figurer l'écart moyen de l'approximation. On peut constater que l'écart final moyen est très faible dans tous les cas.

En conclusion, nous pouvons maintenant représenter la fonction $F_2(K)$ sous la forme d'une série tronquée d'exponentielles :

$$(3.54) \quad F_2(K) = \sum_{n=1}^M a_n e^{\lambda_n K}$$

Il en est de même pour $F_1(K) = F_2(K) + 2$. On a

$$(3.55) \quad F_1(K) = \sum_{n=0}^M a_n e^{\lambda_n K} \quad \text{avec } a_0 = 2 \quad \text{et } \lambda_0 = 0$$

Nous disposons alors de tous les éléments permettant d'explicitier les coefficients d'influence en profondeur finie.

3.2.6. Coefficients d'influence du potentiel de sources en profondeur finie

Les coefficients S^* et S^{**} sont donnés par les formules (2.49).

Le coefficient d'influence $\tilde{S}_{ij} = S^* + i S^{**}$ s'écrit :

$$(3.56) \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{4\pi} [S_{ij}^0 + S_{ij}^1 + S_{ij}^3 + \tilde{S}_{ij}^2]$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } S_{ij}^0 &= \iint_{s_j} \frac{1}{M_i M_i'} dS(M') && M'(x', y', z') \\
 \text{b) } S_{ij}^1 &= \iint_{s_j} \frac{1}{M_i M_0'} dS(M') && M_0'(x', y', -z'-2h) \\
 \text{c) } \tilde{S}_{ij}^2 &= S_{ij}^{*2} + i S_{ij}^{**2} \\
 \text{d) } S_{ij}^{*2} &= \frac{A}{2\pi} \iint_{s_j} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [J(\zeta_1) + J(\zeta_2) + J(\zeta_3) + J(\zeta_4)] dS(M') \\
 \text{e) } S_{ij}^{**2} &= \frac{A}{2} \iint_{s_j} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + e^{\zeta_3} + e^{\zeta_4}] dS(M')
 \end{aligned}$$

(3.57)

avec :

$$\begin{cases}
 A = \frac{1}{h} \frac{(m_0 h + k_0 h)^2}{[(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} = \frac{1}{h} \frac{(M_0 + K_0)^2}{(M_0^2 - K_0^2 + K_0)} , M_0 = m_0 h , K_0 = k_0 h \\
 \zeta_1 = m_0 \xi_1 = m_0 (z_i + z' + i \varpi) \\
 \zeta_2 = m_0 \xi_2 = m_0 (z' - z_i - 2h + i \varpi) \\
 \zeta_3 = m_0 \xi_3 = m_0 (z_i - z' - 2h + i \varpi) \\
 \zeta_4 = m_0 \xi_4 = m_0 [-(z_i + z' + 4h) + i \varpi]
 \end{cases}$$

$$\text{g) } m_0 \text{ solution de : } k_0 = \frac{\omega^2}{g} = m_0 \operatorname{th} m_0 h$$

$$\text{h) } \varpi = (x_i - x') \cos \theta + (y_i - y') \sin \theta$$

Si par ailleurs on représente la fonction $F_1(K)$ par son développement en série tronquée d'exponentielles :

$$\text{i) } F_1(K) = \sum_{n=0}^M a_n e^{\lambda_n K} \quad \text{avec } a_0 = 2 \quad \text{et } \lambda_0 = 0$$

Le terme S_{ij}^3 , s'exprime sous les deux formes suivantes :

(3.57)

$$j) S_{ij}^3 = -\frac{1}{2\pi} \iint_{s_j} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{1}{\lambda_n h + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n h + \xi_4} \right) dS(M')$$

ou bien :

$$k) S_{ij}^3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M a_n \iint_{s_j} \left(\frac{1}{M_{1n} M'} + \frac{1}{M_{2n} M'} + \frac{1}{M_{3n} M'} + \frac{1}{M_{4n} M'} \right) dS(M')$$

avec :

$$M_{1n}(x,y, -z-\lambda_n h) ; M_{2n}(x,y,z+2h-\lambda_n h) ; M_{3n}(x,y,z-2h+\lambda_n h) ; M_{4n}(x,y, -z-4h+\lambda_n h)$$

a) Comme en profondeur infinie, l'expression S_{ij}^0 se calcule en utilisant les résultats du paragraphe I de l'annexe 6.

b) S_{ij}^1 se calcule en faisant le changement de variables z' en $-z'-2h$, ce qui revient à calculer les coefficients d'influence de la facette symétrique par rapport au fond. Après avoir calculé $R_0(-z_G - 2h)$, on aura donc :

- pour les formules asymptotiques :

$$(3.58) \quad S_{ij}^1 = \frac{\mathcal{A}}{R_0(-z_G - 2h)}$$

- pour les formules exactes :

$$(3.59) \quad S_{ij}^1 = - \sum_{k=1}^m J_k^S(-z'_k - 2h, -z'_{k+1} - 2h)$$

c) Le terme \tilde{S}_{ij}^2 se calcule comme en profondeur infinie en utilisant les résultats du paragraphe V de l'annexe 6.

- Formules exactes :

$$(3.60) \quad \tilde{S}_{ij}^2 = S_{ij}^{*2} + i S_{ij}^{**2}$$

$$(3.61) \quad S_{ij}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^4 A_{kl} F_{kl}$$

avec :

$$(3.62) \quad \begin{cases} A_{kl} = [(x'_{k+1} - x'_k) (q \varepsilon_1 - i r \sin \theta) - (y'_{k+1} - y'_k) (p \varepsilon_1 - i r \cos \theta)] \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 ; \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1 \end{cases}$$

et

$$(3.63) \left\{ \begin{array}{l} F_{kl} = \frac{J(\zeta_{k+1}^1) - J(\zeta_k^1) + \zeta_{k+1}^1 \text{Log}(-\zeta_{k+1}^1) - \zeta_k^1 \text{Log}(-\zeta_k^1) + \zeta_k^1 - \zeta_{k+1}^1 + \text{Log} \zeta_{k+1}^1 - \text{Log} \zeta_k^1}{\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| > t \\ F_{kl} = \frac{1}{2} [J(\zeta_{k+1}^1) + J(\zeta_k^1) + \text{Log}(-\zeta_{k+1}^1) + \text{Log}(-\zeta_k^1)] \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| \leq t \end{array} \right.$$

$$\zeta_k^1 = m_0 [z_i + z'_k + i \bar{\omega}_{ik}]$$

$$\bar{\omega}_{ik} = (x_i - x'_k) \cos \theta + (y_i - y'_k) \sin \theta$$

$$\zeta_k^2 = m_0 [z'_k - z_i - 2h + i \bar{\omega}_{ik}]$$

$$\zeta_k^3 = m_0 [z_i - z'_k - 2h + i \bar{\omega}_{ik}]$$

$$\zeta_k^4 = m_0 [-z_i - z'_k - 4h + i \bar{\omega}_{ik}]$$

de même :

$$(3.64) \quad S^{**2}_{ij} = \frac{A}{2} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^4 A_{kl} G_{kl}$$

avec :

$$(3.65) \left\{ \begin{array}{l} G_{kl} = \frac{e^{\zeta_{k+1}^1} - e^{\zeta_k^1}}{\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| > t \\ G_{kl} = \frac{e^{\zeta_{k+1}^1} + e^{\zeta_k^1}}{2} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| \leq t \end{array} \right.$$

les autres notations étant définies comme précédemment .

- Formules asymptotiques :

Dans les mêmes conditions qu'en profondeur infinie, on peut écrire les formules asymptotiques suivantes :

$$(3.66) \quad S_{ij}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{l=1}^4 J(\zeta^l) d\theta$$

$$(3.67) \quad S_{ij}^{**2} = \frac{A}{2} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{l=1}^4 e^{\zeta^l} d\theta$$

avec :

$$(3.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta^1 = m_0 [z_i + z_G + i \varpi_i] \\ \varpi_i = (x_i - x_G) \cos \theta + (y_i - y_G) \sin \theta \\ \zeta^2 = m_0 [z_G - z_i - 2h + i \varpi_i] \\ \zeta^3 = m_0 [z_i - z_G - 2h + i \varpi_i] \\ \zeta^4 = m_0 [-z_i - z_G - 4h + i \varpi_i] \end{array} \right.$$

d) Le dernier calcul concerne le terme S_{ij}^3 . Celui-ci présente une difficulté supplémentaire du fait des deux formulations possibles.

* Sous la forme (3.57.j), le coefficient S_{ij}^3 se présente comme l'intégrale sur la facette d'une fonction de θ et d'une fonction des variables ζ^{1n} définies par :

$$\zeta^{1n} = z + z' + i \varpi + \lambda_n h$$

$$\zeta^{2n} = z' - z - 2h + i \varpi + \lambda_n h$$

$$\zeta^{3n} = z - z' - 2h + i \varpi + \lambda_n h$$

$$\zeta^{4n} = -z' - z - 4h + i \varpi + \lambda_n h$$

Ces fonctions peuvent s'intégrer à l'aide des formules du paragraphe V de l'annexe 6.

Après avoir posé :

$$(3.69) \quad \begin{cases} \zeta_k^{1n} = \zeta_k^1 + \lambda_n h \\ \zeta_k^{2n} = \zeta_k^2 + \lambda_n h \\ \zeta_k^{3n} = \zeta_k^3 + \lambda_n h \\ \zeta_k^{4n} = \zeta_k^4 + \lambda_n h \end{cases}$$

et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ainsi que $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$

Le coefficient S_{ij}^3 s'écrit :

$$(3.70) \quad S_{ij}^3 = \frac{-1}{2\pi} \sum_{n=0}^M a_n \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^m A_{kl} N_{kl}^n$$

avec :

$$(3.71) \quad \begin{cases} N_{kl}^n = \frac{\zeta_{k+1}^{\ln} \operatorname{Log}(-\zeta_{k+1}^{\ln}) - \zeta_k^{\ln} \operatorname{Log}(-\zeta_k^{\ln}) + \zeta_k^{\ln} - \zeta_{k+1}^{\ln}}{\zeta_{k+1}^{\ln} - \zeta_k^{\ln}} & \text{pour } |\zeta_{k+1}^{\ln} - \zeta_k^{\ln}| > t \\ N_{kl}^n = \frac{1}{2} [\operatorname{Log}(-\zeta_{k+1}^{\ln}) + \operatorname{Log}(-\zeta_k^{\ln})] & \text{pour } |\zeta_{k+1}^{\ln} - \zeta_k^{\ln}| \leq t \end{cases}$$

* Sous la forme (3.57.k), l'intégration sur la facette est immédiate et le coefficient S_{ij}^3 se présente sous la forme suivante :

$$(3.72) \quad S_{ij}^3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M a_n (S^{1n} + S^{2n} + S^{3n} + S^{4n})$$

avec :

$$(3.73) \quad S^{\ln} = \iint_{s_j} \frac{1}{M_{\ln} M'} dS(M')$$

avec :

$$M_{1n}(x, y, -z - \lambda_n h)$$

$$M_{2n}(x, y, z + 2h - \lambda_n h)$$

$$M_{3n}(x, y, z - 2h + \lambda_n h)$$

$$M_{4n}(x, y, -z - 4h + \lambda_n h)$$

On applique alors directement les résultats du paragraphe I de l'annexe 6, pour des points influencés définis par M_{1n} , M_{2n} , M_{3n} et M_{4n} .

Cette deuxième formulation est beaucoup plus simple que la précédente, puisque les résultats sont donnés directement par une expression qui est plus simple que l'intégrand de la première formulation.

Un test numérique simple effectué sur un pieu cylindrique vertical, montre que la deuxième formulation est en moyenne 30 fois plus rapide que la première. Les autres coefficients d'influence seront donc établis uniquement à partir des formules (2.49.d') pour les termes correspondant aux dérivées de S_3^{ij} .

3.2.7. Coefficients d'influence du potentiel des doublets normaux en profondeur finie :

Avec les mêmes notations que pour les potentiels de sources, ces coefficients s'écrivent :

$$(3.74) \quad \tilde{D}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} (D_{ij}^0 + D_{ij}^1 + D_{ij}^3 + \tilde{D}_{ij}^2)$$

avec :

$$(3.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } D_{ij}^0 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{M_i M'} dS(M') \quad M'(x', y', z') \\ \text{b) } D_{ij}^1 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{M_i M'_0} dS(M') \quad M'_0(x', y', -z'-2h) \\ \text{c) } D_{ij}^3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^M a_n \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left(\frac{1}{M_{1n} M'} + \frac{1}{M_{2n} M'} + \frac{1}{M_{3n} M'} + \frac{1}{M_{4n} M'} \right) dS(M') \\ \text{d) } \tilde{D}_{ij}^2 = D_{ij}^{*2} + i D_{ij}^{**2} \\ \text{e) } D_{ij}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [J(\zeta^1) + J(\zeta^2) + J(\zeta^3) + J(\zeta^4)] dS(M') \\ \text{f) } D_{ij}^{**2} = \frac{A}{2} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [e^{\zeta^1} + e^{\zeta^2} + e^{\zeta^3} + e^{\zeta^4}] dS(M') \end{array} \right.$$

a) Le coefficient D_{ij}^0 se calcule directement à partir des résultats du paragraphe III de l'annexe 5.

b) Le coefficient D_{ij}^1 s'obtient comme S_{ij}^1 . On a :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.76) \quad D_{ij}^1 = \mathcal{A} \frac{z_i + z_G + 2h}{R_0 (-z_G - 2h)}$$

- Pour les formules exactes :

$$(3.77) \quad D_{ij}^1 = - \sum_{k=1}^m K_k (-z'_k - 2h, -z'_{k+1} - 2h)$$

c) Le calcul de D_{ij}^3 s'effectue comme pour D_{ij}^0 avec des points influencés situés en :

$$M_{1n} (x, y, -z - \lambda_n h) ; M_{2n} (x, y, z + 2h - \lambda_n h) ; M_{3n} (x, y, z - 2h + \lambda_n h) ; \\ M_{4n} (x, y, -z - 4h + \lambda_n h).$$

d) Le coefficient \tilde{D}_{ij}^2 s'obtient à partir des résultats du paragraphe VI de l'annexe 6 :

- Formules exactes :

$$(3.78) \quad D_{ij}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{l=1}^4 \varepsilon_l \sum_{k=1}^m [(x'_{k+1} - x'_k) \sin \theta - (y'_{k+1} - y'_k) \cos \theta] Q_{kl}$$

avec :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad ; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$$

$$(3.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{kl} = \frac{J(\zeta_{k+1}^1) - J(\zeta_k^1) + \operatorname{Log}(-\zeta_{k+1}^1) - \operatorname{Log}(-\zeta_k^1)}{\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1} \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| > t \\ Q_{kl} = \frac{1}{2} [J(\zeta_{k+1}^1) + J(\zeta_k^1)] \quad \text{pour } |\zeta_{k+1}^1 - \zeta_k^1| \leq t \end{array} \right.$$

de même :

$$(3.80) \quad D_{ij}^{**2} = \frac{A}{2} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{l=1}^4 \varepsilon_l \sum_{k=1}^m [(x'_{k+1} - x'_k) \sin \theta - (y'_{k+1} - y'_k) \cos \theta] G_{kl}$$

Les notations étant celles du paragraphe 3.2.6.

- Formules asymptotiques :

$$(3.81) \quad D_{ij}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left\{ [r - i(p \cos \theta + q \sin \theta)] \left[J(\zeta^1) + J(\zeta^2) - \frac{1}{\zeta^1} - \frac{1}{\zeta^2} \right] \right. \\ \left. - [r + i(p \cos \theta + q \sin \theta)] \left[J(\zeta^3) + J(\zeta^4) - \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1}{\zeta^4} \right] \right\}$$

$$(3.82) \quad D_{ij}^{**2} = \frac{A}{2} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left\{ [r - i(p \cos \theta + q \sin \theta)] (e^{\zeta^1} + e^{\zeta^2}) \right. \\ \left. - [r + i(p \cos \theta + q \sin \theta)] (e^{\zeta^3} + e^{\zeta^4}) \right\}$$

e) Cas particulier du coefficient \tilde{D}_{ii} :

Pour les mêmes raisons qu'en profondeur infinie, le coefficient \tilde{D}_{ii} s'écrira :

$$(3.83) \quad \tilde{D}_{ii} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} [D_{ii}^1 + D_{ii}^3 + \tilde{D}_{ii}^2]$$

3.2.8. Coefficients d'influence des vitesses normales de sources en profondeur finie :

Les coefficients d'influence des vitesses normales de sources s'obtiennent en dérivant par rapport à la normale en M_i les coefficients d'influence des potentiels de sources définis en 3.2.6. On a donc :

$$(3.84) \quad \tilde{K}_{ij} = \frac{-1}{4\pi} [p_i (V_{sx}^0 + V_{sx}^1 + V_{sx}^3 + \tilde{V}_{sx}^2) + q_i (V_{sy}^0 + V_{sy}^1 + V_{sy}^3 + \tilde{V}_{sy}^2) + r_i (V_{sz}^0 + V_{sz}^1 + V_{sz}^3 + \tilde{V}_{sz}^2)]$$

a) Les expressions V_{sx}^0 , V_{sy}^0 , V_{sz}^0 sont obtenus directement à partir des résultats du paragraphe II de l'annexe 6.

b) Les expressions de V_{sx}^1 , V_{sy}^1 , V_{sz}^1 s'obtiennent comme précédemment :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.85) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^1 = \mathcal{A} \frac{x_G - x_i}{[R_0 (-z_G - 2h)]^3} \\ V_{s_y}^1 = \mathcal{A} \frac{y_G - y_i}{[R_0 (-z_G - 2h)]^3} \\ V_{s_z}^1 = \mathcal{A} \frac{-z_G - z_i - 2h}{[R_0 (-z_G - 2h)]^3} \end{array} \right.$$

- Pour les formules exactes :

$$(3.86) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_x} (-z'_k - 2h, -z'_{k+1} - 2h) \\ V_{s_y}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_y} (-z'_k - 2h, -z'_{k+1} - 2h) \\ V_{s_z}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_z} (-z'_k - 2h, -z'_{k+1} - 2h) \end{array} \right.$$

c) Les termes V_s^3 se calculent comme le terme V_s^0 , en prenant en compte les changements de signe dans les dérivations par rapport à z . On a donc :

$$(3.87) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^3 = \sum_{n=0}^M (V_{s_x}^{1n} + V_{s_x}^{2n} + V_{s_x}^{3n} + V_{s_x}^{4n}) \\ V_{s_y}^3 = \sum_{n=0}^M (V_{s_y}^{1n} + V_{s_y}^{2n} + V_{s_y}^{3n} + V_{s_y}^{4n}) \\ V_{s_z}^3 = \sum_{n=0}^M (-V_{s_z}^{1n} + V_{s_z}^{2n} + V_{s_z}^{3n} - V_{s_z}^{4n}) \end{array} \right.$$

Les coefficients $V_{s_x}^{1n}$ étant obtenus en appliquant directement les formules du paragraphe II de l'annexe 6 pour des points influencés situés en :

$$M_{1n} (x, y, -z - \lambda_n h) ; M_{2n} (x, y, z + 2h - \lambda_n h) ; M_{3n} (x, y, z - 2h + \lambda_n h) ; \\ M_{4n} (x, y, -z - 4h + \lambda_n h) .$$

d) Posons :

$$(3.88) \quad \begin{cases} \tilde{V}_{s_x}^2 = V_{s_x}^{*2} + i V_{s_x}^{**2} \\ \tilde{V}_{s_y}^2 = V_{s_y}^{*2} + i V_{s_y}^{**2} \\ \tilde{V}_{s_z}^2 = V_{s_z}^{*2} + i V_{s_z}^{**2} \end{cases}$$

On peut alors dériver les formules de \tilde{S}_{ij}^2 en tenant compte des changements de signe de z dans les formules (A6.9). En posant :

$$(3.89) \quad \begin{cases} R_k = A_{k_1} Q_{k_1} - A_{k_2} Q_{k_2} + A_{k_3} Q_{k_3} - A_{k_4} Q_{k_4} \\ \text{et} \\ T_k = A_{k_1} G_{k_1} - A_{k_2} G_{k_2} + A_{k_3} G_{k_3} - A_{k_4} G_{k_4} \end{cases}$$

A_{kl} , Q_{kl} et G_{kl} étant définis par les formules (3.62), (3.79) et (3.65).

On peut écrire :

- Pour les formules exactes :

$$(3.90) \quad \begin{cases} V_{s_x}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \cos \theta) \sum_{k=1}^m R_k d\theta \\ V_{s_y}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \sin \theta) \sum_{k=1}^m R_k d\theta \\ V_{s_z}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_0 \sum_{k=1}^m R_k d\theta \end{cases}$$

$$(3.91) \quad \begin{cases} V_{s_x}^{**2} = \frac{A}{2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \cos \theta) \sum_{k=1}^m T_k d\theta \\ V_{s_y}^{**2} = \frac{A}{2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \sin \theta) \sum_{k=1}^m T_k d\theta \\ V_{s_z}^{**2} = \frac{A}{2} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_0 \sum_{k=1}^m T_k d\theta \end{cases}$$

- Pour les formules asymptotiques :

$$(3.92) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \cos \theta) \sum_{l=1}^4 [J(\zeta^l) - \frac{1}{\zeta^l}] d\theta \\ V_{s_y}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \sin \theta) \sum_{l=1}^4 [J(\zeta^l) - \frac{1}{\zeta^l}] d\theta \\ V_{s_z}^{*2} = \frac{A}{2\pi} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_0 [J(\zeta^1) - \frac{1}{\zeta^1} - J(\zeta^2) + \frac{1}{\zeta^2} + J(\zeta^3) - \frac{1}{\zeta^3} - J(\zeta^4) + \frac{1}{\zeta^4}] d\theta \end{array} \right.$$

ζ^l étant défini par les formules (3.68) et :

$$(3.93) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^{**2} = \frac{A}{2} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \cos \theta) \sum_{l=1}^4 e^{\zeta^l} d\theta \\ V_{s_y}^{**2} = \frac{A}{2} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (i m_0 \sin \theta) \sum_{l=1}^4 e^{\zeta^l} d\theta \\ V_{s_z}^{**2} = \frac{A}{2} \mathcal{A} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_0 [e^{\zeta^1} - e^{\zeta^2} + e^{\zeta^3} - e^{\zeta^4}] d\theta \end{array} \right.$$

e) Cas particulier du coefficient \tilde{K}_{ii} :

Comme en profondeur infinie, on définit le coefficient \tilde{K}_{ii} par :

$$(3.94) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_{ii} = -\frac{1}{4\pi} [p_i (V_{s_x}^{0'} + V_{s_x}^1 + V_{s_x}^3 + \tilde{V}_{s_x}^2) + q_i (V_{s_y}^{0'} + V_{s_y}^1 + V_{s_y}^3 + \tilde{V}_{s_y}^2) + \\ r_i (V_{s_z}^{0'} + V_{s_z}^1 + V_{s_z}^3 + \tilde{V}_{s_z}^2)] \end{array} \right.$$

avec :

$$(3.95) \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^{0'} = V_{s_x}^0 - 2\pi p_i \\ V_{s_y}^{0'} = V_{s_y}^0 - 2\pi q_i \\ V_{s_z}^{0'} = V_{s_z}^0 - 2\pi r_i \end{array} \right.$$

3.2.9. Intégration numérique des coefficients d'influence :

- * Précision souhaitée sur le calcul des coefficients d'influence :

Les essais numériques effectués par Hess et Smith [68] ont montré que, pour le problème de l'écoulement autour d'un corps en milieu illimité, l'erreur absolue sur les coefficients d'influence due à la présence de formulations asymptotiques, telles que celles définies dans les paragraphes I à IV de l'annexe 6, ne perturbait pas sensiblement les grandeurs finales caractéristiques de l'écoulement (vitesses, pressions) même pour un grand nombre de facettes (>2000). Comme cette erreur est de l'ordre de 10^{-4} , nous retiendrons cette tolérance pour les calculs ultérieurs.

- * Choix d'une méthode d'intégration numérique :

Dans les expressions des coefficients d'influence établies précédemment subsiste une intégrale en θ de $-\pi/2$ à $\pi/2$.

Cette intégrale ne peut être exprimée entièrement analytiquement dans le cas général, elle devra donc être évaluée numériquement.

Pour ce faire, nous utiliserons les formules de Gauss-Legendre à N points qui sont exactes pour des polynômes de degré inférieur ou égal à $2N-1$.

Les fonctions à intégrer n'étant pas polynomiales, nous testerons la méthode d'intégration sur des fonctions oscillantes présentant un comportement semblable à celui des intégrands, mais dont le résultat est connu analytiquement.

Pour effectuer ces tests, nous avons choisi les deux fonctions suivantes :

$$(3.96) \quad I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kx + \phi) dx = \frac{1}{k} \left[\sin\left(k\frac{\pi}{2} + \phi\right) - \sin\left(-k\frac{\pi}{2} + \phi\right) \right]$$

et

$$(3.97) \quad J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[k \sin(x + \phi)] dx = \pi J_0(k) \quad , \quad J_0 \text{ étant la fonction de Bessel}$$

de première espèce d'ordre 0.

Pour ces deux intégrales, nous avons fait varier k entre deux limites, le nombre de points d'intégration étant augmenté lorsque l'erreur absolue sur l'intégrale I devenait supérieure à $2 \cdot 10^{-6}$, le déphasage ϕ variant de 0 à 360° au pas de 9° . Les résultats obtenus à l'aide des diverses formules d'intégration sont résumés dans le tableau ci-dessous où l'on précise pour chaque méthode, la gamme de variation de k utilisée, le module de l'erreur absolue maximum et sa localisation.

Méthode	Nb de points	Intervalle pour k	Intégrale I erreur absolue maximum			Intégrale J erreur absolue maximum		
			$ e _{\max}$	k	ϕ	$ e _{\max}$	k	ϕ
Gauss	8	$0 < k \leq 0,4$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	0,15	324	$4,7 \cdot 10^{-7}$	0,35	18
Gauss	12	$0,4 < k \leq 2,5$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	0,5	351	$3,1 \cdot 10^{-5}$	0,8	117
Gauss	16	$2,5 < k \leq 4$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	3,7	297	$3,8 \cdot 10^{-6}$	3,5	171
Gauss	24	$4 < k \leq 8$	$2,3 \cdot 10^{-6}$	7,3	342	$2,9 \cdot 10^{-6}$	4,7	315
Gauss	32	$8 < k \leq 25$	$5,4 \cdot 10^{-6}$	22,5	216	$8,8 \cdot 10^{-6}$	24	360

Ces résultats montrent que dans le cas le plus défavorable, l'erreur absolue due à l'intégration numérique par ces formules est inférieure à $5 \cdot 10^{-5}$.

Il reste à déterminer la pulsation k des termes oscillants des fonctions à intégrer.

Ceux-ci se présentant sous la forme générale :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta f(\theta) e^{i m_0 \varpi}$$

où f est une fonction lentement variable de θ et $\varpi = (x_1 - x') \cos \theta + (y_1 - y') \sin \theta$ peut s'écrire sous la forme $\varpi = R_1 \cos(\theta - \alpha)$, où R_1 est la distance horizontale du point M_1 au sommet M' de la facette considérée.

Dans la pratique, pour chaque point influencé, on ne considérera que la plus grande distance horizontale R du point influencé aux sommets des facettes influençantes. La pulsation de l'intégrand sera alors inférieure à $m_0 R$ (ou $k_0 R$ en profondeur illimitée).

Pour ne pas introduire d'erreur supplémentaire dans le calcul des intégrands, on prendra la tolérance t des formules (3.17) (3.19) (3.39) (3.63) (3.65) (3.71) (3.79) égale à 10^{-4} .

Dans ces conditions, le tableau ci-dessous résume les formules d'intégration à employer pour obtenir les coefficients d'influence avec une précision de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}$, ce qui a été vérifié pour certains coefficients en faisant varier le nombre de points d'intégration.

(3.98)

$m_0 R \leq 0,4$	Gauss 8 points
$0,4 < m_0 R \leq 2,5$	Gauss 12 points
$2,5 < m_0 R \leq 4$	Gauss 16 points
$4 < m_0 R \leq 8$	Gauss 24 points
$8 < m_0 R \leq 25$	Gauss 32 points

La limite en nombre d'onde de $m_0R = 25$ correspond à environ 4 longueurs d'onde sur la plus grande distance horizontale de deux points du corps. Cette limite est généralement suffisante pour les besoins pratiques.

Dans le cas où le nombre d'onde m_0R est supérieur à 25, on peut utiliser une méthode de Simpson à 51 points jusqu'à $m_0R = 35$. L'utilisation de cette méthode entraîne une erreur relative pouvant devenir importante (10 % pour $m_0R = 35$), partiellement compensée par le fait que les valeurs des intégrales décroissent lorsque m_0R croît. A la limite, on peut utiliser les formulations asymptotiques des coefficients d'influence lorsque la période tend vers zéro, qui ne comportent pas d'intégration numérique.

3.2.10. Symétries des coefficients d'influence :

Considérons un corps présentant un plan de symétrie que nous disposerons suivant le plan xOz . On peut remarquer que dans les formules précédentes, si l'on change simultanément $M_i(x_i, y_i, z_i)$ en $\bar{M}_i(x_i, -y_i, z_i)$ et $M'(x', y', z')$ en $\bar{M}'(x', -y', z')$, les coefficients d'influence \tilde{S}_{ij} , \tilde{D}_{ij} et \tilde{K}_{ij} restent inchangés. Cette propriété servira pour diminuer le rang des systèmes linéaires à résoudre dans le cas d'ensembles de corps présentant un plan de symétrie vertical.

3.3. RESOLUTION DES PROBLEMES DE RADIATION ET DE DIFFRACTION :

3.3.1. Constitution des systèmes linéaires :

Les équations intégrales correspondant à la distribution mixte de Green seront discrétisées suivant le principe décrit au paragraphe 1 de l'annexe 5.

Ces équations sont transformées en équations linéaires que nous choisirons d'écrire en autant de points de contrôle que de facettes, de façon à constituer des systèmes collocatifs à $N1$ inconnues. Les points de contrôle seront disposés aux centres de gravité des facettes.

3.3.2. Les problèmes de radiation :

Les problèmes de radiation discrétisés s'obtiennent à partir des équations (2.96) et (2.103). Pour le problème élémentaire de radiation correspondant au mouvement q du corps k , après avoir posé :

$$(3.99) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_j^q = \vec{e}_q \cdot \vec{n}_j & \text{pour } q=1,2,3 \\ \sigma_j^q = (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OG}_j) \cdot \vec{n}_j & \text{pour } q=4,5,6 \end{array} \right.$$

\vec{n}_j étant la normale au centre de gravité G_j de la facette j .

Le système linéaire traduisant le problème de radiation ϕ_{Rk}^q s'écrira :

- En notation complexe :

$$(3.100) \quad \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\mu}_j D_{ij} = \sum_{j \in \Sigma_k} \sigma_j^q \tilde{S}_{ij}$$

Σ_k étant la surface de carène du corps k .

- En notation réelle :

$$(3.101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_1} (\mu_j^* D_{ij}^* - \mu_j^{**} D_{ij}^{**}) = \sum_{j \in \Sigma_k} \sigma_j^q S_{ij}^* \\ \sum_{j=1}^{N_1} (\mu_j^* D_{ij}^{**} + \mu_j^{**} D_{ij}^*) = \sum_{j \in \Sigma_k} \sigma_j^q S_{ij}^{**} \end{array} \right.$$

Les solutions de ces systèmes seront notées :

$$\tilde{\mu}_{Rk}^q = \mu_{Rk}^{*q} + i \mu_{Rk}^{**q}$$

Symétries :

Considérons un système présentant une symétrie par rapport au plan vertical xOz . Ce système sera parfaitement défini si l'on n'en décrit qu'une moitié que nous noterons B. L'autre moitié S sera obtenue par symétrie.

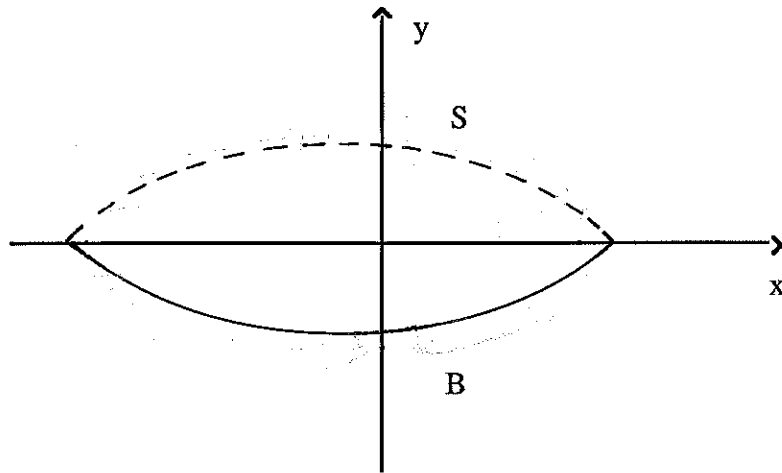


Figure 3.2

Les coefficients d'influence pourront être divisés en 4 blocs. Les coefficients d'influence de la partie décrite sur elle-même (BB), ceux de la partie décrite sur le symétrique (BS), ceux du symétrique sur lui-même (SS) et ceux du symétrique sur la partie décrite (SB). Le système linéaire complet pourra alors s'écrire :

$$(3.102) \quad \begin{pmatrix} \tilde{D}_{BB} & \tilde{D}_{SB} \\ \tilde{D}_{BS} & \tilde{D}_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_B \\ \tilde{\mu}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{BB} & \tilde{S}_{SB} \\ \tilde{S}_{BS} & \tilde{S}_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_B \\ \tilde{\sigma}_S \end{pmatrix}$$

D'après les propriétés des coefficients d'influence décrites en 3.2.10, on a :

$$\tilde{D}_{BB} = \tilde{D}_{SS} \quad , \quad \tilde{D}_{SB} = \tilde{D}_{BS} \quad , \quad \tilde{S}_{BB} = \tilde{S}_{SS} \quad , \quad \tilde{S}_{SB} = \tilde{S}_{BS}$$

Pour certains mouvements (Cavalement, Tangage, Pilonnement), on a $\tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_B$ et pour les autres (Embardée, Roulis, Lacet) $\tilde{\sigma}_s = -\tilde{\sigma}_B$, ce qui entraîne pour les solutions du système, respectivement : $\tilde{\mu}_s = \tilde{\mu}_B$ et $\tilde{\mu}_s = -\tilde{\mu}_B$

En posant :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{CTP} &= \tilde{D}_{BB} + \tilde{D}_{SB} \quad , \quad \tilde{D}_{ERL} = \tilde{D}_{BB} - \tilde{D}_{SB} \\ \tilde{S}_{CTP} &= \tilde{S}_{BB} + \tilde{S}_{SB} \quad , \quad \tilde{S}_{ERL} = \tilde{S}_{BB} - \tilde{S}_{SB} \end{aligned}$$

Les systèmes linéaires s'écrivent :

$$(3.103) \quad \begin{cases} \tilde{D}_{CTP} \tilde{\mu}_B = \tilde{\sigma}_B^q \tilde{S}_{CTP} \quad , \quad \text{pour } q=1,3,5 \\ \tilde{D}_{ERL} \tilde{\mu}_B = \tilde{\sigma}_B^q \tilde{S}_{ERL} \quad , \quad \text{pour } q=2,4,6 \end{cases}$$

La taille des systèmes linéaires à résoudre est divisée par 2. Il en est de même du nombre de coefficients d'influence à calculer. Plus généralement, pour un système présentant P symétries, le temps de calcul des coefficients d'influence sera divisé par P. Nous nous limiterons à 1 symétrie pour les systèmes composés de plusieurs corps.

Masses d'eau ajoutées, amortissements :

Après résolution des problèmes de radiation, les masses d'eau ajoutées et les amortissements sont obtenus par sommation. Les masses d'eau ajoutées et les amortissements d'indice p sur le corps 1 lorsque le corps k effectue le mouvement d'indice q sont donnés par :

$$(3.104) \quad \begin{cases} M_{kl}^{pq} = \rho \sum_{j \in \Sigma_1} \mu_{Rk_j}^{*q} \sigma_j^p \mathcal{A}_j \\ B_{kl}^{pq} = \rho \omega \sum_{j \in \Sigma_1} \mu_{Rk_j}^{**q} \sigma_j^p \mathcal{A}_j \end{cases}$$

\mathcal{A}_j étant l'aire de la facette j.

La résultante des forces de radiation d'indice p sur le corps 1 lorsque le corps k effectue les mouvement d'indice q est donnée par :

$$F_{R_1}^p = \sum_{q=1}^6 [\omega^2 M_{kl}^{pq} (A_k^{q*} \cos \omega t + A_k^{q**} \sin \omega t) + \omega B_{kl}^{pq} (A_k^{q*} \sin \omega t - A_k^{q**} \cos \omega t)]$$

Modifications des formules précédentes dans le cas de symétries :

Dans le cas d'un système présentant une symétrie géométrique, la sommation des forces doit être étendue à la partie non décrite, en tenant compte de la parité de la composante :

$$(3.105) \quad \begin{cases} \sigma_{jS}^p = \sigma_{jB}^p & \text{pour } p=1,3,5 \\ \sigma_{jS}^p = -\sigma_{jB}^p & \text{pour } p=2,4,6 \end{cases}$$

Lorsque le système est composé de plusieurs corps pouvant osciller indépendamment, mais dont seulement certains sont décrits du fait de la symétrie, on doit reconstituer la solution des problèmes de radiation non résolus sur la partie symétrique. Si 1 est le corps symétrique d'un corps décrit k, on a :

$$(3.106) \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_{R_1}^q = \tilde{\mu}_{R_k}^q & , \quad \text{pour } q=1,3,5 \\ \tilde{\mu}_{R_1}^q = -\tilde{\mu}_{R_k}^q & , \quad \text{pour } q=2,4,6 \end{cases}$$

La sommation sera ensuite effectuée comme précédemment sur tous les corps du système . .

3.3.3. Le problème de diffraction :

Les systèmes linéaires traduisant les équations intégrales du problème de diffraction pour une amplitude de houle unité s'écrivent :

- En notation complexe :

$$(3.107) \quad \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\mu}_{Dj} \tilde{D}_{ij} = \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_{Ij} \tilde{S}_{ij}$$

- En notation réelle :

$$(3.108) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_1} (\mu_{Dj}^* D_{ij}^* - \mu_{Dj}^{**} D_{ij}^{**}) = \sum_{j=1}^{N_1} (\sigma_{Ij}^* S_{ij}^* - \sigma_{Ij}^{**} S_{ij}^{**}) \\ \sum_{j=1}^{N_1} (\mu_{Dj}^* D_{ij}^{**} + \mu_{Dj}^{**} D_{ij}^*) = \sum_{j=1}^{N_1} (\sigma_{Ij}^* S_{ij}^{**} + \sigma_{Ij}^{**} S_{ij}^*) \end{cases}$$

avec :

$$(3.109) \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}_{Ij} = \sigma_{Ij}^* + i \sigma_{Ij}^{**} = - \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}'_I}{\partial n} \right)_j & \tilde{\mu}_{Dj} = \mu_{Dj}^* + i \mu_{Dj}^{**} \\ \tilde{\Phi}'_I = \frac{-g}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} e^{i m_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \end{cases}$$

d'où :

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \frac{g m_0}{\omega \text{ch } m_0 h} [r \text{sh } m_0(z_G+h) + i (p \cos \beta + q \sin \beta) \text{ch } m_0(z_G+h)] e^{i m_0(x_G \cos \beta + y_G \sin \beta)}$$

p, q, r étant les composantes de la normale à la facette j, x_G, y_G et z_G étant les coordonnées du centre de gravité G de cette facette.

En profondeur infinie, les expressions précédentes se simplifient, il vient :

$$\tilde{\Phi}'_I = \frac{-g}{\omega} e^{k_0 [z + i(x \cos \beta + y \sin \beta)]}$$

et

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \omega [r + i (p \cos \beta + q \sin \beta)] e^{k_0 [z_G + i(x_G \cos \beta + y_G \sin \beta)]}$$

$$k_0 = \frac{\omega^2}{g}$$

Symétries :

Comme dans le cas du problème de radiation, dans le cas d'une symétrie par rapport au plan xOz , le système linéaire précédent s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}_{BB} & \tilde{D}_{SB} \\ \tilde{D}_{BS} & \tilde{D}_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_B \\ \tilde{\mu}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{BB} & \tilde{S}_{SB} \\ \tilde{S}_{BS} & \tilde{S}_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_B \\ \tilde{\sigma}_S \end{pmatrix}$$

avec :

$$\tilde{D}_{BB} = \tilde{D}_{SS} \quad , \quad \tilde{D}_{SB} = \tilde{D}_{BS} \quad , \quad \tilde{S}_{BB} = \tilde{S}_{SS} \quad , \quad \tilde{S}_{SB} = \tilde{S}_{BS}$$

Le problème ne se présente cependant pas aussi simplement que dans le cas de la radiation puisqu'il n'existe pas de relation directe entre $\tilde{\sigma}_B$ et $\tilde{\sigma}_S$. On est alors conduit à transformer le système linéaire précédent.

Celui-ci peut s'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{D}_{BB} \tilde{\mu}_B + \tilde{D}_{SB} \tilde{\mu}_S = \tilde{S}_{BB} \tilde{\sigma}_B + \tilde{S}_{SB} \tilde{\sigma}_S \\ \tilde{D}_{SB} \tilde{\mu}_B + \tilde{D}_{BB} \tilde{\mu}_S = \tilde{S}_{SB} \tilde{\sigma}_B + \tilde{S}_{BB} \tilde{\sigma}_S \end{cases}$$

Soit :

$$(\tilde{D}_{BB} + \tilde{D}_{SB}) (\tilde{\mu}_B + \tilde{\mu}_S) = (\tilde{S}_{BB} + \tilde{S}_{SB}) (\tilde{\sigma}_B + \tilde{\sigma}_S)$$

$$(\tilde{D}_{BB} - \tilde{D}_{SB}) (\tilde{\mu}_B - \tilde{\mu}_S) = (\tilde{S}_{BB} - \tilde{S}_{SB}) (\tilde{\sigma}_B - \tilde{\sigma}_S)$$

Si l'on pose comme précédemment :

$$\tilde{D}_{CTP} = \tilde{D}_{BB} + \tilde{D}_{SB} \quad , \quad \tilde{D}_{ERL} = \tilde{D}_{BB} - \tilde{D}_{SB}$$

$$\tilde{S}_{CTP} = \tilde{S}_{BB} + \tilde{S}_{SB} \quad , \quad \tilde{S}_{ERL} = \tilde{S}_{BB} - \tilde{S}_{SB}$$

On pourra résoudre les deux systèmes linéaires de rang moitié du système initial :

$$(3.110) \quad \begin{cases} \tilde{D}_{CTP} \tilde{\mu}_1 = \tilde{S}_{CTP} (\tilde{\sigma}_B + \tilde{\sigma}_S) \\ \tilde{D}_{ERL} \tilde{\mu}_2 = \tilde{S}_{ERL} (\tilde{\sigma}_B - \tilde{\sigma}_S) \end{cases}$$

Les inconnues $\tilde{\mu}_B$ et $\tilde{\mu}_S$ seront alors obtenues par :

$$(3.111) \quad \begin{cases} \tilde{\mu}_B = (\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2) / 2 \\ \tilde{\mu}_S = (\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) / 2 \end{cases}$$

Nous aurons donc à résoudre deux systèmes $N \times N$ au lieu d'un système $2N \times 2N$, ce qui divise le temps de calcul par 4 pour les méthodes de résolution directes usuelles.

Forces d'excitation :

Posons :

$$\tilde{\mu}'_I = - \Phi'_I$$

Les forces d'excitation seront connues à partir des solutions $\tilde{\mu}_{Dj}$ du problème de diffraction. Les efforts d'indice p sur le corps k seront donnés par :

$$(3.112) \quad \begin{cases} F_{exk}^{p*} = - \rho a \omega \sum_{j \in \Sigma_k} (\mu_{Dj}^{**} + \mu'_{Ij}{}^{**}) \sigma_j^p \mathcal{A}_j \\ F_{exk}^{p**} = + \rho a \omega \sum_{j \in \Sigma_k} (\mu_{Dj}^* + \mu'_{Ij}{}^*) \sigma_j^p \mathcal{A}_j \end{cases}$$

σ_j^p étant défini par les formules (3.99).

Formules d'Haskind :

L'expression des forces d'excitation sur un corps k peut être déterminée directement à partir de la solution des problèmes de radiation par les formules d'Haskind. Celles-ci s'écrivent :

$$(3.113) \quad \begin{cases} F_{exk}^{p*} = \rho a \omega \sum_{j \in \Sigma_k} (- \mu'_{Ij}{}^{**} \sigma_j^p + \mu_{Rkj}^{p**} \sigma_{Ij}^* + \mu_{Rkj}^{p*} \sigma_{Ij}^{**}) \mathcal{A}_j \\ F_{exk}^{p**} = \rho a \omega \sum_{j \in \Sigma_k} (- \mu'_{Ij}{}^* \sigma_j^p + \mu_{Rkj}^{p*} \sigma_{Ij}^* - \mu_{Rkj}^{p**} \sigma_{Ij}^{**}) \mathcal{A}_j \end{cases}$$

$\tilde{\mu}_{Rkj}^p$ étant la solution du problème de radiation pour le mouvement p du corps k , σ_j^p étant toujours défini par les formules (3.99).

Dans le cas de symétries, les sommations devront s'étendre à la totalité de la carène, en tenant compte de la parité de σ_j^p et de la solution des problèmes de radiation pour les corps non décrits d'après les formules (3.105) et (3.106).

3.3.4. Méthodes de résolution des systèmes linéaires :

Dans le cas général, nous avons le choix entre résoudre un système linéaire réel de $2N$ équations à $2N$ inconnues tel que les systèmes (3.101) et (3.108) ou résoudre un système complexe de N équations à N inconnues tel que les systèmes (3.100) et (3.107). Ces systèmes sont des systèmes pleins, non symétriques, à diagonale principale non strictement dominante, le rang des systèmes étant généralement petit ($N < 200$ en général), il sera donc tout indiqué d'utiliser des méthodes directes de résolution. Parmi les différentes méthodes, nous avons utilisé la méthode de Gauss en deux versions utilisant toutes deux le pivot partiel par colonnes, mais en ordonnant les calculs lors de la triangularisation et de la résolution, soit par lignes, soit par colonnes.

La méthode de lissage des fonctions par des séries tronquées d'exponentielles employée par J.C. Daubisse nécessitant la résolution au sens des moindres carrés de systèmes surdéterminés, nous avons aussi employé la méthode de Householder en réel et en complexe [16].

Enfin, nous avons résolu le système réel à l'aide d'une méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) [16], qui permet en calculant un nombre caractéristique du système à résoudre, le facteur de conditionnement, d'avoir une estimation du conditionnement de la matrice et du nombre de chiffres significatifs des solutions. Si C est le facteur de conditionnement et N_m le nombre maximal de chiffres décimaux correspondant à la représentation de la mantisse du nombre, le nombre de chiffres significatifs N_s de la solution peut être estimé par la formule:

$$N_s = N_m - \log_{10} C$$

Toutes ces méthodes ont été essayées sur des matrices réelles (200×200) ou complexes (100×100) constituées de la façon suivante :

Dans le cas réel :

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad \text{pour } i \neq j ; a_{ii} = 0,5$$

Dans le cas complexe :

$$\text{Re}(a_{ij}) = \frac{1}{i+j-1} \quad \text{pour } i \neq j ; \text{Re}(a_{ii}) = 0,5$$

$$\text{Im}(a_{ij}) = \frac{1}{i+j-1} \quad \text{pour } i \neq j ; \text{Im}(a_{ii}) = 0,5$$

Nous avons résolu ces systèmes avec un second membre correspondant à la somme des termes de la ligne de la matrice, ce qui correspond à une solution théorique de 1.

cas réel :

$$b_i = \sum_{j=1}^{200} a_{ij} \quad \text{solution théorique } x_i = 1$$

cas complexe :

$$\text{Re}(b_i) = \sum_{j=1}^{100} \text{Re}(a_{ij}) \quad \text{solution théorique } \text{Re}(x_i) = 1$$

$$\text{Im}(b_i) = \sum_{j=1}^{100} \text{Im}(a_{ij}) \quad \text{solution théorique } \text{Im}(x_i) = 1$$

Les résultats des différentes méthodes, programmées en FORTRAN 77 en simple précision et exécutées sur un ordinateur μ Vax II sont consignées dans le tableau ci-dessous.

Système à résoudre	Méthode	Temps CPU _s	Rapport des temps par rapport à la méthode la plus rapide	Solution la plus éloignée de 1	
100 x 100 Complexe	Gauss par colonnes	11,5	1	1,000004	
	Gauss par lignes	13,5	1,17	1,000011	
	Householder	58,4	5,07	0,9996917	
200 x 200 Réel	Gauss par colonnes	26,0	2,26	1,000010	
	Gauss par lignes	34,8	3,02	1,000003	
	Householder	64,5	5,6	1,009774	
	S.V.D.	481,4	41,86	0,9999167	Cond = 192,7

On peut remarquer que, conformément aux prévisions, la résolution d'un système complexe 100 x 100 est, pour une formulation identique, environ deux fois plus rapide que celle d'un système réel 200 x 200.

Parmi les méthodes de Gauss, celle utilisant la triangularisation par colonnes est plus rapide d'environ 20 %. Ceci provient probablement du fait qu'en FORTRAN, les tableaux sont rangés par colonnes, ce qui facilite les calculs d'adresses pour la méthode de Gauss correspondante. Ce résultat risquerait d'être inversé avec d'autres langages de programmation, puisqu'en PASCAL, par exemple, les tableaux sont rangés par lignes. La méthode de Householder est plus longue que la méthode de Gauss, le nombre de calculs étant théoriquement 2 fois plus élevé ($2N^2M/3$ pour un système à M lignes et N colonnes au lieu de $N^3/3$ pour la méthode de Gauss). En complexe, les temps de calcul sont augmentés du fait que la formulation est différente, puisque les transformations orthogonales font appel aux quantités complexes et à leurs conjugués.

La méthode de décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) permet d'avoir une estimation du nombre de chiffres significatifs de la solution par une méthode itérative. Un facteur de conditionnement de 192, comme dans l'exemple précédent, correspond, en simple précision, à environ 4 chiffres significatifs sur les solutions.

De l'examen global de ces résultats, il ressort que pour un système assez bien conditionné, la méthode de Gauss est la plus rapide et que, du fait du petit nombre d'opérations nécessaires, elle ne pénalise pas la précision des résultats. Il n'en serait pas de même si le système était moins bien conditionné, puisque dans ce cas, la méthode de Householder évite la propagation des erreurs.

Nous utiliserons donc a priori la méthode de Gauss par colonnes en complexe pour résoudre les systèmes linéaires collocationnels du problème de diffraction-radiation. La vérification du conditionnement de la matrice sera réalisée suivant la méthode de "contrôle de bonne résolution" proposée par J.C. Daubisse en ajoutant systématiquement un second membre constitué de la somme des termes de la ligne correspondante, ce qui, par comparaison avec la solution théorique unité donnera une estimation empirique de la confiance que l'on peut avoir dans les résultats. Dans le cas où la solution numérique s'écarte de l'unité de plus de 10^{-4} en simple précision, il sera prudent de reprendre la résolution du système par une méthode de Householder complexe.

Les systèmes surdéterminés seront résolus avec la méthode de Householder au sens des moindres carrés, tandis que la méthode du S.V.D. servira à mettre en évidence les propriétés de conditionnement de certains systèmes linéaires.

3.4. EQUATIONS DU MOUVEMENT :

Pour calculer les mouvements des corps, il suffit de résoudre le système complexe $6N \times 6N$: (2.135) ou le système réel $12N \times 12N$: (2.136).

Les inerties et les centres de gravité des corps sont des données mécaniques ne dépendant pas de la géométrie des carènes, les seuls termes restant à calculer sont les coefficients de rappel hydrostatique linéaires des flotteurs discrétisés.

3.4.1. Caractéristiques hydrostatiques d'un flotteur discrétisé :

Supposons un flotteur en équilibre discrétisé en N_1 facettes, chacune d'elle ayant une surface \mathcal{A}_j , un centre de gravité $G_j(x_{Gj}, y_{Gj}, z_{Gj})$, une normale $\vec{n}(p_j, q_j, r_j)$ et étant constituée de m côtés. Si l'on calcule les mouvements par rapport à un point $O(x_o, y_o, z_o)$, on peut déterminer les principales caractéristiques hydrostatiques de la carène par les formules suivantes :

- Surface mouillée :

$$(3.114) \quad S = \sum_{j=1}^{N_1} \mathcal{A}_j$$

- Volume de carène :

$$(3.115) \quad V = \sum_{j=1}^{N_1} \mathcal{A}_j r_j z_{G_j}$$

- Centre de carène (centre de gravité du volume immergé) :

$$(3.116) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_1} \mathcal{A}_j q_j y_{G_j} x_{G_j} \\ y_c = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_1} \mathcal{A}_j r_j z_{G_j} y_{G_j} \\ z_c = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_1} \mathcal{A}_j q_j y_{G_j} z_{G_j} \end{array} \right.$$

- Surface de flottaison :

$$(3.117) \quad S_F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m (y_{l+1} + y_l) (x_{l+1} - x_l)$$

La double sommation ne concernant que les côtés $M_{l+1} M_l$ des facettes j appartenant au contour de flottaison Γ .

Si, pour un segment $M_{l+1} M_l$ appartenant au contour de flottaison Γ tel que $|x_{l+1} - x_l| > t$, on pose :

$$(3.118) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{(y_{l+1} - y_l)}{x_{l+1} - x_l} \\ b = (y_l - y_0) - a(x_l - x_0) \\ U_l = x_l - x_0 \\ V_l = x_{l+1} - x_0 \\ X_1 = V_l - U_l \\ X_2 = V_l^2 - U_l^2 \\ X_3 = V_l^3 - U_l^3 \\ X_4 = V_l^4 - U_l^4 \end{array} \right.$$

On peut déterminer les coefficients de rappel hydrostatique S_{ij} définis par (1.95) à l'aide des formules :

$$(3.119) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{34} = \rho g \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m \left(a^2 \frac{X_3}{6} + 2 a b \frac{X_2}{4} + b^2 \frac{X_1}{2} \right) \\ S_{35} = -\rho g \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m \left(a \frac{X_3}{3} + b \frac{X_2}{2} \right) \\ S_{45} = -\rho g \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m \left(a^2 \frac{X_4}{8} - 2 a b \frac{X_3}{6} - b^2 \frac{X_2}{4} \right) \\ R = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m \left(a \frac{X_4}{4} + b \frac{X_3}{3} \right) \\ r = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{\substack{l=1 \\ M_{l+1}M_l \in \Gamma}}^m \left(a^3 \frac{X_4}{12} + 3 a^2 b \frac{X_3}{9} + 3 a b^2 \frac{X_2}{6} + b^3 \frac{X_1}{3} \right) \end{array} \right.$$

R et r étant respectivement les grand et petit rayons métacentriques. Si l'on appelle G (X_G, Y_G, Z_G) le centre de gravité du flotteur, on a de plus :

$$(3.120) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{43} = S_{34} \\ S_{53} = S_{35} \\ S_{54} = S_{45} \\ S_{33} = \rho g S_F \\ S_{44} = \rho g V [r + (z_c - Z_G)] \\ S_{55} = \rho g V [R + (z_c - Z_G)] \end{array} \right.$$

Le centre de gravité de la surface de flottaison est donné par :

$$(3.121) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_F = x_0 - \frac{S_{35}}{S_F} \\ Y_F = y_0 + \frac{S_{34}}{S_F} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un corps symétrique par rapport au plan xOz, on utilise les formules (3.114) à (3.119) avec N₁ égal au nombre de facettes de la partie décrite, les coefficients sur la carène complète seront obtenus en multipliant par 2 : S, x_c, z_c, S_F, S₃₅, V, R, r et en annulant y_c, S₃₄, S₄₅. On peut ensuite appliquer les formules (3.120) pour obtenir les autres coefficients.

Toutes les caractéristiques hydrostatiques du flotteur discrétisé sont alors connues et l'on peut résoudre les équations du mouvement du flotteur.

3.4.2. Calcul des mouvements :

Les mouvements sont obtenus en résolvant les systèmes linéaires suivants :

- En notation complexe :

$$(3.122) \quad -\omega^2 \sum_{p=1}^6 \bar{M}_{ipq} \tilde{A}_i + \sum_{p=1}^6 \bar{S}_{ipq} \tilde{A}_i - \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^6 \omega^2 \bar{M}_{ki}^{pq} \tilde{A}_k = \tilde{F}_{exi}^q$$

- En notation réelle :

$$(3.123) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\omega^2 \sum_{p=1}^6 \bar{M}_{ipq} (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) + \sum_{p=1}^6 \bar{S}_{ipq} (A_i^{q*} \cos \omega t + A_i^{q**} \sin \omega t) \\ - \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^6 [\omega \bar{M}_{ki}^{2=pq} (A_k^{p*} \cos \omega t + A_k^{p**} \sin \omega t) + \omega \bar{B}_{ki}^{pq} (A_k^{p*} \sin \omega t - A_k^{p**} \cos \omega t)] \\ = a (F_{exi}^{q*} \cos \omega t + F_{exi}^{q**} \sin \omega t) \end{array} \right.$$

où :

N est le nombre de corps du système.

$\tilde{A}_i = A_i^{q*} + i A_i^{q**}$ représente l'amplitude complexe du mouvement q du corps i.

\bar{M}_{ipq} est la matrice des inerties du corps i.

\bar{S}_{ipq} est la matrice des coefficients hydrostatiques du corps i.

\bar{M}_{ki}^{pq} est la matrice des masses d'eau ajoutées du corps i pour les mouvements du corps k

\bar{B}_{ki}^{pq} est la matrice des coefficients d'amortissement du corps i pour les mouvements du corps k

$a \tilde{F}_{exi}^q = a (F_{exi}^{q*} + i F_{exi}^{q**})$

est la force d'excitation sur le corps i pour une houle d'amplitude a.

Le système linéaire (3.122) est un système 6N x 6N qui est résolu par la méthode de triangularisation de Gauss en complexe comme indiqué au paragraphe 3.3.4.

Dans le cas où le contrôle de bonne résolution s'écarte de plus de 10⁻⁴ de la solution théorique, ce qui peut arriver dans le cas des mouvements du fait de l'ordre de grandeur des coefficients et du conditionnement de la matrice, on résout le système réel 12N x 12N (3.123) en double précision.

3.4.3. Calcul des pressions hydrodynamiques :

Une fois connus les mouvements des corps, on peut calculer les pressions hydrodynamiques sur chaque facette des flotteurs, à condition d'avoir au préalable résolu les équations linéaires du problème de diffraction. On a :

$$(3.124) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \text{Re} (\tilde{p} e^{-i\omega t}) = p^* \cos \omega t + p^{**} \sin \omega t \\ \text{avec :} \\ \tilde{p} = i \rho \omega \Phi = p^* + i p^{**} \\ \tilde{p} = -i \rho \omega [a (\tilde{\mu}'_{Ij} + \tilde{\mu}'_{Dj}) + \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^6 \mu_{Rkj}^{\sim q} \tilde{A}_k^{\sim q}] \end{array} \right.$$

Les amplitudes $\tilde{A}_k^{\sim q} = a \tilde{A}'_k^{\sim q}$ sont proportionnelles à l'amplitude de la houle. Si l'on a résolu les équations du mouvement pour une amplitude unité, on peut écrire :

$$(3.125) \quad \tilde{p} = -i \rho a \omega [(\tilde{\mu}'_{Ij} + \tilde{\mu}'_{Dj}) + \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^6 \mu_{Rkj}^{\sim q} \tilde{A}'_k^{\sim q}]$$

où $\tilde{\mu}_{Rkj}^{\sim q}$ est la solution du problème de radiation pour le mouvement q du corps k , $\tilde{\mu}'_{Dj}$ est la solution du problème de diffraction et $\tilde{\mu}'_{Ij} = -\tilde{\phi}'_{Ij}$ représente l'influence de la houle incidente.

Les pressions hydrodynamiques, intégrées sur un ensemble de facettes, permettent d'accéder aux efforts partiels sur la structure et peuvent constituer les entrées d'un programme de calcul de structure .

Dans le cas d'un système symétrique, les pressions devront être calculées sur la partie décrite et son symétrique en tenant compte de la solution des problèmes de radiation sur les corps non décrits, d'après les formules (3.106), (3.109) et (3.111).

3.5. CALCUL DES EFFORTS DE DERIVE PAR LA FORMULATION DE MARUO-NEWMAN :

La résultante des efforts horizontaux et le moment résultant d'axe vertical sur l'ensemble des corps peuvent être obtenus lorsqu'on a résolu les problèmes de radiation, le problème de diffraction et les équations du mouvement.

Les deux forces horizontales et le moment d'axe vertical sont donnés par les formules (2.170) et (2.176) du paragraphe 2.9.3.

Si l'on appelle \vec{F} la résultante des forces horizontales et \vec{M} le moment résultant d'axe vertical, on a :

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_S \\
 & \text{b) } \vec{M} = \vec{M}_I + \vec{M}_S \\
 & \text{avec :} \\
 & \text{c) } \vec{F}_I = -2 \pi a \rho \omega \operatorname{Im} [H^*(\beta) + i H^{**}(\beta)] (\vec{i}_x \cos \beta + \vec{i}_y \sin \beta) \\
 & \text{d) } \vec{F}_S = -8 \pi \rho \frac{m_0 (k_0 h)^2}{k [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \operatorname{Im} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H^*(\theta) \overline{H^{**}(\theta)} (\vec{i}_x \cos \theta + \vec{i}_y \sin \theta) d\theta \\
 & \text{e) } \vec{M}_I = 2 \pi \rho \frac{a \omega}{m_0} \operatorname{Re} [\dot{H}^*(\beta) + i \dot{H}^{**}(\beta)] \\
 & \text{f) } \vec{M}_S = 4 \pi \rho \frac{(k_0 h)^2}{h [(m_0 h)^2 - (k_0 h)^2 + k_0 h]} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [H^{**}(\theta) \overline{\dot{H}^*(\theta)} - H^*(\theta) \overline{\dot{H}^{**}(\theta)}] d\theta \\
 & \text{g) } \tilde{H}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tilde{H}(\theta) \\
 & \text{h) } \tilde{H}(\theta) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\tilde{\sigma} + \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \right) \frac{\operatorname{ch} m_0(z' + h)}{\operatorname{sh} m_0 h} e^{-i m_0(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M') \\
 & \text{i) } \tilde{\sigma} = \sum_{q=1}^6 \tilde{V}_{Ek}^q \cdot \vec{n} - a \frac{\partial \Phi'_I}{\partial n} \\
 & \text{j) } \tilde{\mu} = a \mu'_D + \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^6 \mu_{Rk}^q \tilde{A}_k^q \\
 & \tilde{V}_{Ek}^q \text{ et } \tilde{A}_k^q \text{ étant respectivement la vitesse et l'amplitude complexe du} \\
 & \text{mouvement } q \text{ du corps } k
 \end{aligned}
 \tag{3.126}$$

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, on peut expliciter ces formules. Il faut tout d'abord déterminer les densités de singularités cinématiquement équivalentes aux carènes en mouvement dans le cas de la distribution mixte de Green.

Sur la facette j appartenant au corps i , de centre de gravité $G_j(x_{G_j}, y_{G_j}, z_{G_j})$ et de normale $\vec{n}_j(p_j, q_j, r_j)$ on a :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_j &= a \left\{ -i \omega \sum_{q=1}^6 \tilde{A}_i^q \sigma_j^q + \frac{g m_0}{\omega \operatorname{ch} m_0 h} [r_j \operatorname{sh} m_0(z_{G_j} + h) + \right. \\
 & \left. i (p_j \cos \beta + q_j \sin \beta) \operatorname{ch} m_0(z_{G_j} + h)] e^{i m_0(x_{G_j} \cos \beta + y_{G_j} \sin \beta)} \right\}
 \end{aligned} \right.
 \tag{3.127}$$

et

$$(3.128) \quad \tilde{\mu}_j = a \left[\tilde{\mu}'_{Dj} + \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^6 \tilde{\mu}'_{Rkj} \tilde{A}_k^q \right]$$

$$(3.129) \quad \begin{cases} \sigma_j^q = \vec{e}_q \cdot \vec{n}_j & \text{pour } q=1,2,3 \\ \sigma_j^q = (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OG}_j) \cdot \vec{n}_j & \text{pour } q=4,5,6 \end{cases}$$

En posant sur la facette j :

$$\tilde{S}_j = \iint_{s_j} \frac{\text{ch } m_0 (z' + h)}{\text{sh } m_0 h} e^{-i m_0 (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M')$$

et

$$\tilde{D}_j = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{\text{ch } m_0 (z' + h)}{\text{sh } m_0 h} e^{-i m_0 (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M')$$

La fonction de Kochin $\tilde{H}(\theta)$ s'écrit :

$$(3.130) \quad \tilde{H}(\theta) = \sum_{j=1}^N (\sigma_j \tilde{S}_j + \tilde{\mu}_j \tilde{D}_j)$$

En utilisant les résultats du paragraphe V de l'annexe 6 , on peut intégrer analytiquement \tilde{S}_j et \tilde{D}_j sur la facette j composée de m côtés de sommets $M_k(x_k, y_k, z_k)$.

Posons : $\zeta = m_0 [z' - i (x' \cos \theta + y' \sin \theta)]$, S_j peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{S}_j = \frac{1}{2} \iint_{s_j} \left\{ \frac{e^{m_0 [(z'+h) - i (x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} + e^{-m_0 [(z'+h) + i (x' \cos \theta + y' \sin \theta)]}}{\text{sh } m_0 h} \right\} dS(M')$$

soit :

$$\tilde{S}_j = \frac{e^{m_0 h}}{2 \text{sh } m_0 h} \left[\iint_{s_j} e^{\zeta} dS(M') + e^{-2 m_0 h} \iint_{s_j} e^{-\bar{\zeta}} dS(M') \right]$$

où la barre désigne le complexe conjugué.

On applique alors directement les résultats de l'annexe 6 et il vient :

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \tilde{S}_j = \frac{e^{m_0 h}}{2 m_0 \operatorname{sh} m_0 h} \sum_{k=1}^m [K_k M_k + e^{-2m_0 h} \overline{K_k L_k}] \\
 & \text{avec :} \\
 & \text{b) } K_k = (x_{k+1} - x_k) (q_j - i r_j \sin \theta) - (y_{k+1} - y_k) (p_j - i r_j \cos \theta) \\
 & \text{c) } \begin{cases} M_k = \frac{e^{\zeta_{k+1}} - e^{\zeta_k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ M_k = \frac{1}{2} (e^{\zeta_{k+1}} + e^{\zeta_k}) & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{cases} \\
 & \text{d) } \zeta_k = m_0 [z_k - i (x_k \cos \theta + y_k \sin \theta)] \\
 & \text{e) } \begin{cases} L_k = \frac{e^{-\zeta_{k+1}} - e^{-\zeta_k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ L_k = \frac{-1}{2} (e^{\zeta_{k+1}} + e^{-\zeta_k}) & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{cases} \\
 & \text{et de même pour } \tilde{D}_j : \\
 & \text{f) } \tilde{D}_j = \frac{-i e^{m_0 h}}{2 \operatorname{sh} m_0 h} \sum_{k=1}^m [X_k M_k + e^{-2m_0 h} \overline{X_k L_k}] \\
 & \text{g) } X_k = (x_{k+1} - x_k) \sin \theta - (y_{k+1} - y_k) \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.131}$$

On peut procéder de même pour la dérivée par rapport à θ de la fonction de Kochin :

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{H}}(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \tilde{H}(\theta) \\
 \dot{\tilde{H}}(\theta) &= \sum_{j=1}^N (\tilde{\sigma}_j \dot{\tilde{S}}_j + \tilde{\mu}_j \dot{\tilde{D}}_j)
 \end{aligned}
 \tag{3.132}$$

Il suffit de dériver les formules précédentes par rapport à θ , il vient :

$$\begin{aligned}
 (3.133) \quad a) \quad \vec{S} &= \frac{e^{m_0 h}}{2 m_0 \operatorname{sh} m_0 h} \sum_{k=1}^m [(\dot{K}_k M_k + K_k \dot{M}_k) + e^{-2m_0 h} (\bar{K}_k \bar{L}_k + \bar{K}_k \bar{L}_k)] \\
 &\text{et} \\
 b) \quad \vec{D} &= \frac{-i e^{m_0 h}}{2 \operatorname{sh} m_0 h} \sum_{k=1}^m [(\dot{X}_k M_k + X_k \dot{M}_k) + e^{-2m_0 h} (\bar{X}_k \bar{L}_k + \bar{X}_k \bar{L}_k)] \\
 &\text{avec :} \\
 c) \quad \dot{K}_k &= -i r_j [(x_{k+1} - x_k) \cos \theta + (y_{k+1} - y_k) \sin \theta] \\
 d) \quad \dot{X}_k &= (x_{k+1} - x_k) \cos \theta + (y_{k+1} - y_k) \sin \theta \\
 e) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{M}_k &= \left\{ (\zeta_{k+1} - \zeta_k) i m_0 [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) e^{\zeta_{k+1}} - (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta) e^{\zeta_k}] \right. \\ &\quad \left. - (e^{\zeta_{k+1}} - e^{\zeta_k}) i m_0 [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) - (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta)] \right\} \frac{1}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)^2} \\ &\quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ \dot{M}_k &= \frac{i m_0}{2} [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) e^{\zeta_{k+1}} + (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta) e^{\zeta_k}] \\ &\quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{aligned} \right. \\
 f) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{L}_k &= \left\{ -(\zeta_{k+1} - \zeta_k) i m_0 [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) e^{-\zeta_{k+1}} - (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta) e^{-\zeta_k}] \right. \\ &\quad \left. - (e^{-\zeta_{k+1}} - e^{-\zeta_k}) i m_0 [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) - (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta)] \right\} \frac{1}{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)^2} \\ &\quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ \dot{L}_k &= \frac{i m_0}{2} [(x_{k+1} \sin \theta - y_{k+1} \cos \theta) e^{-\zeta_{k+1}} + (x_k \sin \theta - y_k \cos \theta) e^{-\zeta_k}] \\ &\quad \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Sous cette forme, les termes \vec{F}_I et \vec{M}_I s'explicitent immédiatement à partir de la fonction de Kochin intégrée sur les facettes. Les termes \vec{F}_S et \vec{M}_S se présentent sous la forme d'une intégrale en θ de $-\pi/2$ à $\pi/2$ du même type que celle rencontrée lors de l'intégration numérique des coefficients d'influence. L'intégration sera donc effectuée numériquement suivant les critères définis au paragraphe 3.2.9.

Dans le cas d'un système présentant une symétrie par rapport au plan vertical xOz , il faut considérer les densités de singularités équivalentes $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\mu}$ sur tout le système (partie décrite et partie symétrique) puisque la houle, ainsi que les mouvements d'éventuels corps non décrits ne sont pas obligatoirement symétriques. Les densités de singularités sur la partie non décrite seront multipliées par les fonctions de Kochin sur la partie symétrique, obtenues en changeant y en $-y$ dans les formules (3.131,b,c,d,e,g) et (3.133,c,d,e,f) et en changeant le signe devant la sommation de 1 à m des formules (3.131,a,f) et (3.132,a,b) puisque la symétrie change le sens de rotation positif par rapport à la normale extérieure sur les facettes (cette méthode revient à changer y_k en $-y_{k+1}$ et y_{k+1} en $-y_k$, ce qui conserve le sens de rotation positif

par rapport à la normale extérieure).

3.6. CALCUL DES EFFORTS DE DERIVE PAR INTEGRATION DES PRESSIONS :

Reprenons les résultats du paragraphe 2.9.2. concernant les efforts de dérive par intégration des pressions. Les formules donnant les efforts de dérive sur le corps i s'écrivent :

$$(3.134) \left\{ \begin{aligned} \vec{F}_i &= \langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{F}_{M_i} + [S_{i33} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i34} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i35} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_z \\ &+ \rho \iint_{\Sigma_i} [\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 \vec{P} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi + F_2] \vec{n} dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

$$(3.135) \left\{ \begin{aligned} \vec{M}_i(O') &= \langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{M}_{M_i} + [S_{i34} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i44} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i45} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_x \\ &+ [S_{i35} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{y_i}^2}{2} z_F - S_{i45} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i55} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2}] \vec{i}_y \\ &+ \rho \iint_{\Sigma_i} [\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + P_0 \vec{P} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \phi + F_2] \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{OP}_0 \wedge \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

O' étant un point lié à la carène Σ_i , le transport en un point O fixe se faisant par :

$$(3.136) \quad \vec{M}_i(O) = \vec{M}_i(O') + \langle \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{M_i} \rangle$$

Dans ces formules, les notations sont les suivantes :

\vec{F}_{M_i} et \vec{M}_{M_i} représentent les forces et les moments d'inertie sur le corps i , ce qui permet de tenir compte directement de l'influence des efforts de liaison éventuels.

z_F est la cote du point de calcul des efforts (O ou O')

$\vec{\tau}_i$ et $\vec{\theta}_i$ sont les translations et les rotations autour du point O du corps i

$\vec{P}_0 \vec{P}$ est le déplacement du point du corps situé initialement en P_0 .

S_{ipq} est la matrice des coefficients hydrostatiques du corps i

$F_2 = \frac{1}{4} \frac{m_0 a^2 g}{\text{sh } m_0 h \text{ ch } m_0 h}$ est la constante de l'équation de Lagrange.

ζ et Z sont respectivement les hauteurs de vagues et les déplacements à la flottaison Γ du corps i .

Le symbole $\langle \rangle$ désignant la valeur moyenne temporelle.

Pour poursuivre plus loin des développements, nous allons étudier la contribution des différents termes.

Posons :

$$(3.137) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^1 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} \left[\frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 \right] \vec{n} dS \rangle \\ \vec{M}_i^1 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} \left[\frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 \right] (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS \rangle \end{array} \right.$$

$$(3.138) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^2 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} \vec{P}_0 P \vec{\text{grad}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{n} dS \rangle \\ \vec{M}_i^2 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} \vec{P}_0 P \vec{\text{grad}} \frac{\partial \phi}{\partial t} (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS \rangle \end{array} \right.$$

$$(3.139) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^3 = \langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{F}_{M_i} \rangle \\ \vec{M}_i^3 = \langle \vec{\theta}_i \wedge \vec{M}_{M_i} \rangle \end{array} \right.$$

$$(3.140) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^4 = \langle \frac{-\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 \vec{n} dS \rangle \\ \vec{M}_i^4 = \langle \frac{-\rho g}{2} \int_{\Gamma_i} (\zeta - Z)^2 (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS \rangle \end{array} \right.$$

$$(3.141) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^5 = \langle S_{i33} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{z_i}^2}{2} z_F - S_{i34} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i35} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2} \rangle \vec{i}_z \\ \vec{M}_i^5 = \langle S_{i34} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{z_i}^2}{2} z_F - S_{i44} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i45} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2} \rangle \vec{i}_x \\ \quad + \langle S_{i35} \frac{\theta_{x_i}^2 + \theta_{z_i}^2}{2} z_F - S_{i45} \frac{\theta_{y_i} \theta_{z_i}}{2} + S_{i55} \frac{\theta_{x_i} \theta_{z_i}}{2} \rangle \vec{i}_y \end{array} \right.$$

$$(3.142) \quad \vec{M}_i^6 = \langle \vec{\tau}_i \wedge \vec{F}_{M_i} \rangle$$

$$(3.143) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^7 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} F_2 \vec{n} dS \rangle \\ \vec{M}_i^7 = \langle \rho \iint_{\Sigma_i} F_2 (\vec{OP}_0 \wedge \vec{n}) dS \rangle \end{array} \right.$$

Ces termes représentant les différents efforts du second ordre auxquels est soumis la carène Σ_i .

Les termes 1 et 7 sont de même signe, et de signe contraire au terme 4, les autres étant a priori de signe quelconque.

La constante de Lagrange qui intervient dans le terme 7 représente la contribution de la houle incidente du second ordre aux efforts de dérive. Ce terme est nul en profondeur infinie ou si l'on ne considère que la houle incidente du premier ordre. Sa contribution n'apparaît que pour une houle incidente du second ordre en profondeur faible, proportionnellement à a^2/h , pour la force verticale et les moments de roulis et de tangage.

Les problèmes hydrodynamiques que nous avons résolus jusqu'à présent ne permettent pas de connaître tous les termes intervenant dans les équations précédentes. Les termes qui n'ont pas encore été calculés sont les hauteurs de vagues à la flottaison et les vitesses aux points de contrôle sur la carène.

Le calcul des hauteurs de vagues à la flottaison ne présente aucune difficulté, il s'agit seulement de calculer les pressions, donc les potentiels à la flottaison, ce qui sera réalisé à l'aide de coefficients d'influence supplémentaires.

Le calcul des vitesses présente une difficulté lorsqu'on utilise une distribution mixte de Green. Les coefficients d'influence à calculer sont ceux correspondant aux vitesses de sources et aux vitesses de doublets normaux. Ces derniers coefficients, bien que théoriquement et numériquement bien définis, par exemple à l'aide des formules de paragraphe IV de l'annexe 6, introduisent des erreurs dans le calcul des vitesses.

Pour mettre en évidence ces erreurs, nous avons recalculé les vitesses normales sur les facettes à l'aide des formules donnant les vitesses de sources et de doublets normaux, pour le problème de radiation en milieu infini pour une sphère discrétisée en 72 facettes sur la moitié. Les résultats ont montré une erreur de l'ordre de 10% sur la vitesse normale à la paroi. Par ailleurs, si l'on compare les vitesses tangentielles de la distribution mixte à celles obtenues par une distribution de sources, l'écart est de l'ordre de 30%. Ces résultats ont été confirmés pour le problème de diffraction-radiation en présence d'une surface libre pour une discrétisation de 6 facettes par longueur d'onde [82][23]. Ces imprécisions sont très gênantes pour le calcul des efforts de dérive puisque les vitesses n'interviennent pas au même ordre dans les différents

termes, qui eux-mêmes peuvent être de signes différents, ce qui entraîne que les erreurs s'additionnent. Pour obtenir les vitesses de doublets avec une meilleure précision, il serait sans doute nécessaire de connaître les variations du potentiel par rapport aux variables d'espace sur les facettes, ce qui permettrait de prendre en compte les dérivées des distributions.

Diverses possibilités existent pour résoudre ce problème, par exemple en recourant à des techniques de lissage de surface. Néanmoins, il ne faut pas oublier que quelle que soit la précision du calcul des vitesses de doublets normaux, il est nécessaire de calculer les coefficients d'influence des vitesses de sources.

Dès lors, il est facile de chercher la distribution de sources cinématiquement équivalente aux carènes en mouvement en résolvant un système linéaire supplémentaire défini par :

$$(3.144) \quad \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j \tilde{K}_{ij} = \tilde{V}'_{E_i} \cdot \vec{n} - \frac{\partial \phi'_I}{\partial n}$$

où \tilde{V}'_{E_i} est la vitesse complexe des points i des carènes du système et $\frac{\partial \phi'_I}{\partial n}$ la vitesse normale complexe pour une houle incidente d'amplitude unité.

Une fois connues les densités de sources, les vitesses dans le fluide s'obtiendront par sommation à partir des formules (2.75) en ajoutant les vitesses dues à la houle incidente :

$$(3.145) \quad \tilde{V}'_i = \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j (\tilde{V}'_{s_{xij}} \vec{i}_x + \tilde{V}'_{s_{yij}} \vec{i}_y + \tilde{V}'_{s_{zij}} \vec{i}_z) + \frac{\partial \phi'_I}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \phi'_I}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial \phi'_I}{\partial z} \vec{i}_z$$

Les coefficients $\tilde{V}'_{s_{xij}}$, $\tilde{V}'_{s_{yij}}$, $\tilde{V}'_{s_{zij}}$ étant définis à partir des formules (3.34) ou (3.84).

La hauteur de vagues à la flottaison s'obtiendra de même par sommation des coefficients d'influence des potentiels de sources en des points situés au voisinage de la ligne de flottaison à laquelle on ajoutera la hauteur de la houle incidente:

$$(3.146) \quad \tilde{h}_k = -i \frac{\omega a}{g} \left[\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j \tilde{S}_{kj} + \phi'_{I_k} \right]$$

Seule reste à déterminer la position des points de calcul de la hauteur de vagues à la flottaison. Les formules employées n'étant pas définies sur la ligne de flottaison, nous nous placerons au voisinage de celle-ci.

Des essais systématiques ont montré que la hauteur de vagues rapportée à l'amplitude de la houle a était connue avec une précision de 10^{-3} si l'on choisissait un point de contrôle situé à une immersion relative z/a de 10^{-2} , la verticale de ce point coupant le plan de la surface libre en un point situé à une distance $d/a = 10^{-2}$ sur la normale extérieure au milieu du segment de flottaison.

Maintenant, toutes les grandeurs permettant de calculer les efforts de dérive par intégration des pressions sont connues. Les intégrales doubles seront calculées par sommation en multipliant les grandeurs calculées au centre de gravité de la facette par l'aire de celle-ci, les intégrales simples en multipliant les quantités calculées au point

de contrôle par la longueur du segment.

On a donc finalement :

$$(3.147) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^1 = \frac{\rho}{4} \sum_{j \in \Sigma_i} \vec{V}_j \vec{V}_j \vec{n}_j \mathcal{A}_j \\ \vec{M}_i^1 = \frac{\rho}{4} \sum_{j \in \Sigma_i} \vec{V}_j \vec{V}_j (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) \mathcal{A}_j \end{array} \right.$$

$$(3.148) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^2 = \frac{\rho}{2} \sum_{j \in \Sigma_i} (\vec{\tau}_i + \theta_i \wedge \vec{OG}_j) (i \omega \vec{V}_j) \vec{n}_j \mathcal{A}_j \\ \vec{M}_i^2 = \frac{\rho}{2} \sum_{j \in \Sigma_i} (\vec{\tau}_i + \theta_i \wedge \vec{OG}_j) (i \omega \vec{V}_j) (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) \mathcal{A}_j \end{array} \right.$$

$$(3.149) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^3 = \frac{1}{2} \theta_i \wedge [-\omega^2 (\vec{P}_i \vec{\tau}_i + \vec{T}_i \theta_i)] \\ \vec{M}_i^3 = \frac{1}{2} \theta_i \wedge [-\omega^2 (-\vec{T}_i \vec{\tau}_i + \vec{I}_i \theta_i)] \end{array} \right.$$

$$(3.150) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^4 = \frac{-\rho g}{4} \sum_{\substack{j \in \Sigma_i \\ l \in \Gamma_i}} (\vec{h}_1 - \vec{Z}_l) (\vec{h}_1 - \vec{Z}_l) \vec{n}_j L_l \\ \vec{M}_i^4 = \frac{-\rho g}{4} \sum_{\substack{j \in \Sigma_i \\ l \in \Gamma_i}} (\vec{h}_1 - \vec{Z}_l) (\vec{h}_1 - \vec{Z}_l) (\vec{OP}_1 \wedge \vec{n}_j) L_l \end{array} \right.$$

$$(3.151) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^5 = \frac{1}{4} [S_{i33} (\theta_{x_i} \theta_{x_i} + \theta_{z_i} \theta_{z_i}) z_F - S_{i34} \theta_{y_i} \theta_{z_i} + S_{i35} \theta_{x_i} \theta_{z_i}] \vec{i}_z \\ \vec{M}_i^5 = \frac{1}{4} [S_{i34} (\theta_{x_i} \theta_{x_i} + \theta_{z_i} \theta_{z_i}) z_F - S_{i44} \theta_{y_i} \theta_{z_i} + S_{i45} \theta_{x_i} \theta_{z_i}] \vec{i}_x \\ \quad + \frac{1}{4} [S_{i35} (\theta_{x_i} \theta_{x_i} + \theta_{z_i} \theta_{z_i}) z_F - S_{i45} \theta_{y_i} \theta_{z_i} + S_{i55} \theta_{x_i} \theta_{z_i}] \vec{i}_y \end{array} \right.$$

$$(3.152) \quad \vec{M}_i^6 = \frac{1}{2} \vec{\tau}_i \wedge [- \omega^2 (\vec{P}_i \vec{\tau}_i + \vec{T}_i \theta_i)]$$

$$(3.153) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i^7 = \frac{\rho}{2} \sum_{j \in \Sigma_i} F_2 \vec{n}_j \mathcal{A}_j \\ \vec{M}_i^7 = \frac{\rho}{2} \sum_{j \in \Sigma_i} F_2 (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) \mathcal{A}_j \end{array} \right.$$

où \vec{V}_j désigne la vitesse du point G_j , centre de gravité de la facette j de normale \vec{n}_j et d'aire \mathcal{A}_j , \vec{P}_i , \vec{T}_i et \vec{I}_i sont les sous-matrices composant la matrice des inerties du corps i , h_i est la hauteur de vagues au point P_i de la flottaison, dont le déplacement vertical au cours du mouvement est Z_1 , la longueur du segment 1 de la ligne de flottaison est L_1 , et F_2 est la constante de l'équation de Lagrange.

Symétries :

Dans le cas d'un système présentant une symétrie par rapport au plan vertical xOz , on utilise le même principe que pour le problème de diffraction. On résoudra donc deux systèmes de rang moitié constitués de la façon suivante :

$$(3.154) \quad \tilde{K}_{CTP} \tilde{\sigma}_1 = \tilde{S}_{mB} + \tilde{S}_{mS}$$

$$(3.155) \quad \tilde{K}_{ERL} \tilde{\sigma}_2 = \tilde{S}_{mB} - \tilde{S}_{mS}$$

où :

$$\tilde{K}_{CTP} = \tilde{K}_{ijB} + \tilde{K}_{ijS}$$

$$\tilde{K}_{ERL} = \tilde{K}_{ijB} - \tilde{K}_{ijS}$$

$$\tilde{S}_{mB} = (\vec{V}_{E_i} \cdot \vec{n} - \frac{\partial \phi'_I}{\partial n})_B$$

$$\tilde{S}_{mS} = (\vec{V}_{E_i} \cdot \vec{n} - \frac{\partial \phi'_I}{\partial n})_S$$

L'indice B désignant la partie décrite et l'indice S son symétrique. Les vitesses \vec{V}'_{Ei} sont les vitesses des points i des carènes appartenant à la partie décrite et au symétrique.

On en déduit les sources sur la partie décrite :

$$(3.156) \quad \tilde{\sigma}_B = \left(\frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2}{2} \right)$$

et sur la partie symétrique :

$$(3.157) \quad \tilde{\sigma}_S = \left(\frac{\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2}{2} \right)$$

Tous les calculs peuvent être poursuivis comme dans le cas où il n'y a pas de symétrie en reconstituant les grandeurs inconnues sur la partie symétrique à partir de celles calculées sur la partie décrite.

Pour un corps i appartenant à un ensemble de corps, les efforts de dérive s'écrivent :

$$(3.158) \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^1 + \vec{F}_i^2 + \vec{F}_i^3 + \vec{F}_i^4 + \vec{F}_i^5 + \vec{F}_i^7$$

Les moments par rapport à un point mobile O' sont donnés par :

$$(3.159) \quad \vec{M}_i(O') = \vec{M}_i^1 + \vec{M}_i^2 + \vec{M}_i^3 + \vec{M}_i^4 + \vec{M}_i^5 + \vec{M}_i^7$$

Ces moments se transportant en un point O fixe par :

$$(3.160) \quad \vec{M}_i(O) = \vec{M}_i(O') + \vec{M}_i^6$$

On peut remarquer que l'avantage principal de cette formulation est qu'elle donne tous les efforts sur chaque corps d'un système et non pas deux forces et un moment comme dans le cas des formules de Maruo-Newman.

Le fait d'avoir reformulé le problème en termes de singularités de type sources nous a permis d'obtenir une bonne précision sur le calcul des vitesses, tout en gagnant du temps par rapport à un calcul par une distribution mixte, puisque le temps de résolution du système supplémentaire est inférieur au temps de calcul des coefficients d'influence des vitesses de doublets normaux.

Pour conclure, nous calculerons donc les efforts du second ordre par cette méthode, les formules de Maruo-Newman nous servant pour contrôler la qualité des résultats obtenus sur les résultantes des forces horizontales et sur le moment vertical résultant.

3.7. CALCUL DE LA CINEMATIQUE DANS LE FLUIDE :

Lors du calcul des forces de dérive par intégration des pressions, nous avons été amenés à calculer les densités de sources cinématiquement équivalentes aux carènes. Il est alors possible de connaître la cinématique dans tout le fluide en recalculant, pour chaque point où l'on désire la vitesse et les pressions, les coefficients d'influence correspondant. Les vitesses dans le fluide au point k seront données par :

$$\vec{V}_k = a \left[\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j (\tilde{V}_{s_x k_j} \vec{i}_x + \tilde{V}_{s_y k_j} \vec{i}_y + \tilde{V}_{s_z k_j} \vec{i}_z) + \frac{\partial \phi'_{I k}}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial \phi'_{I k}}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial \phi'_{I k}}{\partial z} \vec{i}_z \right]$$

et les pressions par :

$$\tilde{h}_k = -i \omega \frac{a}{g} \left[\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{\sigma}_j \tilde{S}_{k_j} + \phi'_{I k} \right]$$

$\tilde{\sigma}_j$ étant la distribution de sources cinématiquement équivalente aux carènes.

3.8. ORGANISATION DU CODE AQUADYN :

3.8.1. Généralités sur les programmes de calcul :

Un code de calcul appelé AQUADYN, fondé sur la théorie et les développements numériques décrits précédemment a été conçu et réalisé depuis 1976 par P. Guével, G. Delhommeau et J.C. Daubisse. Ce code permet d'obtenir la réponse d'un ensemble de structures fixes ou mobiles sollicitées par une houle cylindrique du premier ordre en profondeur infinie ou en profondeur finie uniforme.

Il se compose d'un ensemble de 36 programmes principaux, faisant appel à une bibliothèque commune de 51 sous-programmes, qui peuvent être enchaînés en fonction du problème à traiter, les résultats intermédiaires étant stockés dans des fichiers séquentiels. Le langage de programmation utilisé est le FORTRAN norme ANSI 77. L'ensemble des programmes représente 13285 instructions.

Ces programmes résolvent les problèmes de diffraction et de radiation en profondeur infinie ou finie uniforme dans les cas suivants :

- 1 ou plusieurs corps, 0 ou 1 symétrie par rapport au plan xOz .
- 1 corps, 2 symétries par rapport aux plans xOz et yOz .

Les mouvements peuvent être calculés pour un seul corps (2 symétries) ou plusieurs corps (0 ou 1 symétrie) reliés par des liaisons élastiques et des amortissements linéaires.

Les efforts de dérive sont calculés par les formules de Maruo-Newman. Dans le cas d'un ensemble de corps avec 0 ou 1 symétrie, ces efforts peuvent être calculés par intégration des pressions, on peut ensuite en déduire la cinématique dans tout le fluide.

Les principales étapes du développement de ce code ont été les suivantes :

- 1976 : Résolution du problème de diffraction-radiation et calcul des mouvements pour un seul corps en profondeur infinie [49].
- 1979 : Extension au cas d'un système composé de plusieurs corps [83].
- 1981 : Extension au cas de la profondeur finie uniforme [15].
- 1982 : Calcul des efforts de dérive par les formules de Maruo-Newman [57].
- 1983 : Calcul des efforts de dérive sur un ensemble de corps par intégration des pressions. Cinématique dans le fluide [23].

Ce code est actuellement utilisé par plus de 10 organismes et sociétés françaises et étrangères travaillant dans les domaines du génie océanique et pétrolier.

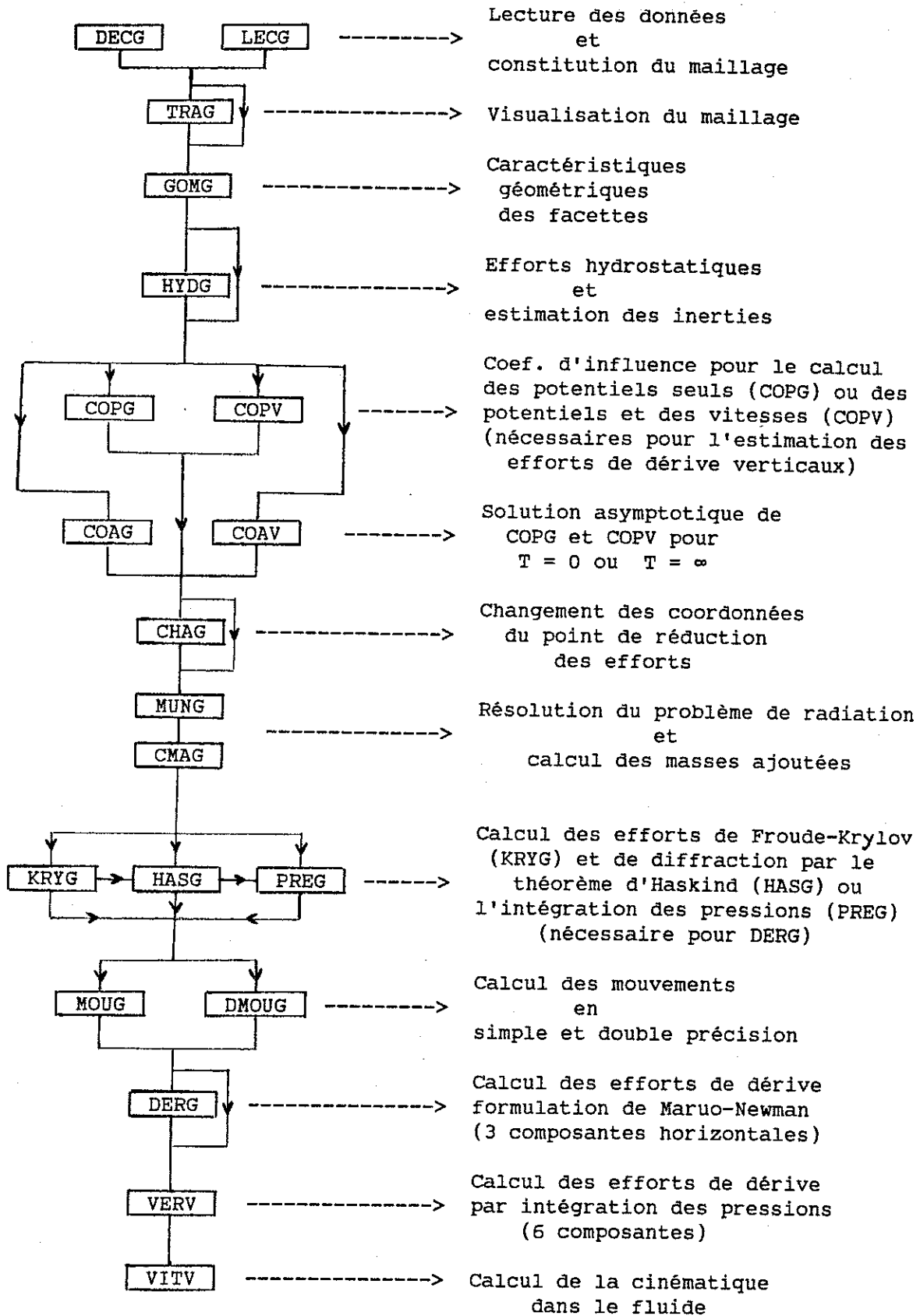
3.8.2. Dénomination des programmes de calcul et description sommaire :

- * Les noms des programmes de calcul comportent au minimum 4 variables.
- * Les trois premières lettres constituent la racine du nom du programme et indiquent la tâche effectuée par le programme.
- * La quatrième variable indique la configuration du système. Elle peut prendre trois valeurs :
 - G : 1 ou plusieurs corps, 0 ou 1 symétrie
 - 2 : 1 corps, 2 symétries
 - V : 1 ou plusieurs corps, 0 ou 1 symétrie, calcul possible du torseur complet des efforts de dérive et de la cinématique dans le fluide.
- * Racines des noms de programmes :
 - DEC Lecture des données du calcul et du découpage en numérotation naturelle (annexe 5).
 - LEC Lecture des données du calcul, numéros et coordonnées des points suivant les conventions de Hess et Smith (annexe 5).
 - TRA Vérification des données par tracé de la carène.
 - GOM Caractéristiques géométriques des facettes représentant la carène (annexe 5)
 - HYD Calcul de la matrice des coefficients hydrostatiques de la carène et calcul approché de la matrice des inerties en supposant que la masse du flotteur est répartie uniformément sur la surface de carène.

- COP Calcul des coefficients d'influence pour une période de houle et une profondeur donnée à partir des résultats du paragraphe 3.2, sans utiliser les formulations asymptotiques pour les termes :
 \tilde{S}_{ij}^2 , \tilde{D}_{ij}^2 , $\tilde{V}_{s_x}^2$, $\tilde{V}_{s_y}^2$ et $\tilde{V}_{s_z}^2$
- COA Formulation asymptotique des coefficients d'influence en profondeur infinie lorsque la période tend vers zéro ou vers l'infini (paragraphe 2.2.4).
- CHA Changement du point de calcul des efforts.
- MUN Calcul des singularités des problèmes de radiation (paragraphe 3.3.2.)
- CMA Calcul des masses d'eau ajoutées et des coefficients d'amortissement (paragraphe 3.3.2).
- KRY Calcul des efforts de diffraction par les formules de Froude-Krylov (paragraphe 3.3.3. termes en μ'_1 des formules 3.112).
- PRE Calcul des singularités du problème de diffraction et des efforts de diffraction par intégration des pressions (paragraphe 3.3.3 formules 3.112)
- HAS Calcul des efforts de diffraction à partir des singularités des problèmes de radiation par le théorème d'Haskind (paragraphe 3.3.3 formules 3.113)
- MOU Calcul des mouvements (DMOU en double précision) (paragraphe 3.4).
- DER Calcul des efforts de dérive par les formules de Maruo-Newman (paragraphe 3.5).
- VER Calcul des efforts de dérive par intégration des pressions (paragraphe 3.6.).
- VIT Calcul de la cinématique dans le fluide (paragraphe 3.7).

3.8.3. Organigramme de fonctionnement :

L'organigramme d'utilisation du code AQUADYN est le suivant :



Des exemples d'exploitation de ces programmes, ainsi que des tests numériques seront montrés dans le chapitre suivant.

3.8.4. Temps de calcul :

Les paramètres permettant d'estimer les temps de calcul pour un nombre de facettes suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les temps de résolution des systèmes linéaires par rapport au temps de calcul des coefficients d'influence (moins de 200 facettes environ) sont indiqués ci-dessous :

- T : période de la houle en secondes
- L : plus grande distance horizontale de deux points du système
- N_1 : nombre de facettes sur la partie décrite
- N_F : nombre de facettes de la partie décrite ayant un côté dans le plan de la surface libre
- N_θ : nombre de points d'intégration en θ , fonction de $K_0 = \frac{4\pi^2 L}{g T^2}$
pour :

$K_0 \leq 0,4$	$N_\theta = 8$
$0,4 < K_0 \leq 2,5$	$N_\theta = 12$
$2,5 < K_0 \leq 4$	$N_\theta = 16$
$4 < K_0 \leq 8$	$N_\theta = 24$
$8 < K_0 \leq 25$	$N_\theta = 32$
$K_0 > 25$	$N_\theta = 51$

Si l'on pose :

$N_2 = N_1 + N_F$ si l'on souhaite calculer les efforts de dérive par intégration des pressions et

$N_2 = N_1$ dans le cas contraire

et

$I_F = 1$ en profondeur infinie.

$I_F = 4$ en profondeur finie.

Les temps de calcul peuvent être estimés par :

$T = C N_1 N_2 N_\theta I_F$ pour 0 symétrie

$T = 2 C N_1 N_2 N_\theta I_F$ pour 1 symétrie

$T = 4 C N_1 N_2 N_\theta I_F$ pour 2 symétries

C étant une constante dépendant de l'ordinateur utilisé (de l'ordre de 6 ms pour un VAX 11-750).

Pour un nombre de facettes supérieur à 200, il faut tenir compte du temps de résolution des systèmes linéaires proportionnel à N_1^3 .

Chapitre 4 : RESULTATS NUMERIQUES

INTRODUCTION :

Le code AQUADYN a été largement utilisé en pratique pour le calcul du comportement de structures allant de la plate-forme semi-submersible au chalutier. Les résultats du code ont été comparés à ceux d'autres codes et aux expériences dans le cadre des tests internationaux organisés par l'A.R.A.E. (Association de Recherche Action des Eléments) en 1977 [107] pour des corps de géométrie simple, l'I.T.T.C. (International Towing Tank Conference) en 1984 [108] pour une plate-forme semi-submersible et l'I.S.S.C. (International Ship and Offshore Structures Congress) en 1985 [28] pour une plate-forme à lignes tendues.

Dans ce chapitre, nous allons présenter des exemples significatifs illustrant les différentes possibilités du code, ses limites et les développements futurs.

Nous étudierons d'abord, en profondeur infinie, l'influence de la discrétisation sur la convergence des résultats dans le cas d'un corps test, le caisson D.N.V. Nous comparerons ensuite les résultats obtenus pour le problème de la diffraction de la houle par un pieu cylindrique en profondeur finie uniforme aux formules analytiques. Nous nous intéresserons ensuite aux efforts de dérive dans le cas d'une demi-sphère et d'un système de deux demi-sphères interagissant entre elles en profondeur infinie, puis pour la barge N.S.M.B. en profondeur finie uniforme.

Les propriétés théoriques de symétrie des coefficients hydrodynamiques et d'identité des formulations des efforts de diffraction seront vérifiées dans des cas particuliers. Nous montrerons sur un exemple comment localiser les résonances et les extinctions des mouvements.

Nous aborderons ensuite le problème des fréquences irrégulières en les localisant, en montrant leurs conséquences, puis en les éliminant.

Nous proposerons enfin des améliorations devant faciliter l'emploi de ce type de programme.

4.1. INFLUENCE DE LA DISCRETISATION, LE CAISSON D.N.V. :

Le caisson D.N.V. est un corps proposé par le D.N.V. (Det Norske Veritas) pour tester les différents programmes de diffraction-radiation.

4.1.1. Description du test.

Il s'agit d'un caisson parallélépipédique de 90 m de longueur, 90 m de largeur et de 40 m de tirant d'eau, dont les inerties sont les suivantes :

$$I_{44} = 3,5369 \cdot 10^{11} \text{ kg x m}^2 ; \quad I_{55} = 3,3364 \cdot 10^{11} \text{ kg x m}^2 ; \quad I_{66} = 3,5113 \cdot 10^{11} \text{ kg x m}^2$$

La masse volumique du fluide est de $1\,000\text{ kg/m}^3$.

Ce corps a été discrétisé en utilisant une symétrie, de façon à pouvoir calculer les efforts de dérive par intégration des pressions. Les différentes discrétisations sont indiquées ci-dessous, le symbole à gauche de la discrétisation permettant de repérer les résultats correspondants sur les planches suivantes.

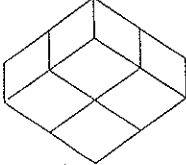
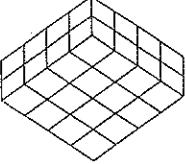
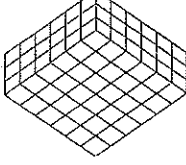
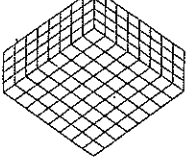
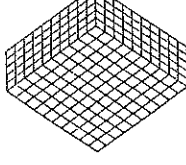
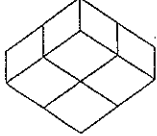
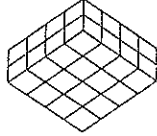
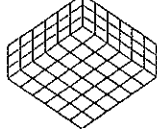
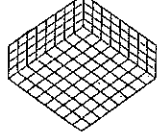
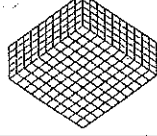
Symbole	Découpage	Discrétisation
⊖		6 facettes sur la moitié du corps
⊞		24 facettes sur la moitié du corps
△		54 facettes sur la moitié du corps
×		96 facettes sur la moitié du corps
+		150 facettes sur la moitié du corps
*		Expériences D.N.V.
■		Expériences E.N.S.M.

Figure 4.1

Le tableau ci-dessous indique le nombre de facettes par longueur d'onde en fonction de la période pour les différents maillages .

Période (s)	6	10	15	20	25	30
	1,2	3,4	7,8	13,8	21,6	31,2
	2,5	6,9	15,6	27,7	43,3	62,4
	3,7	10,4	23,4	41,6	65	93,6
	5	13,8	31,2	55,4	86,6	124,8
	6,2	17,3	39	69,3	108	156

Sur les planches suivantes, nous présentons les principaux résultats obtenus avec le code AQUADYN en fonction de la discrétisation. Les résultats correspondent aux coefficients de masse d'eau ajoutée et d'amortissement CM_{11} , CM_{33} , CA_{11} et CA_{33} définis par :

$$CM_{11} = \frac{M_{11}}{\rho L^3} , \quad CM_{33} = \frac{M_{33}}{\rho L^3} , \quad CA_{11} = \frac{B_{11}}{\rho L^3 \omega} , \quad CA_{33} = \frac{B_{33}}{\rho L^3 \omega}$$

(ρ étant la masse volumique du fluide, L une longueur de référence égale à la longueur du caisson et ω la pulsation du mouvement), aux efforts d'excitation F_x/a , F_z/a et M_y/a en unités S.I. (N et Nxm) rapportés à l'amplitude a de la houle incidente, aux mouvements X/a , Z/a et θ/a , X étant le cavalemt, Z le pilonnement et θ le tangage en degrés, et aux efforts de dérive F_x/a^2 , F_z/a^2 et M_y/a^2 .

Les points pour les périodes de 1 s et de 40 s représentent les résultats obtenus pour ces périodes avec les formulations asymptotiques correspondant respectivement aux périodes de houle nulle et infinie. Les efforts et les mouvements sont calculés pour une houle se propageant suivant l'axe des x , le point de calcul des efforts et des mouvements étant situé au centre de gravité de la structure en $x_G=0$ m, $y_G=0$ m, $z_G=-10,62$ m . Nous avons aussi reporté sur les courbes des points expérimentaux extraits du rapport A.R.A.E. [107], d'après les essais du D.N.V. [34], ainsi que ceux obtenus à l'E.N.S.M. par A. Clément [13].

4.1.2. Résultats :

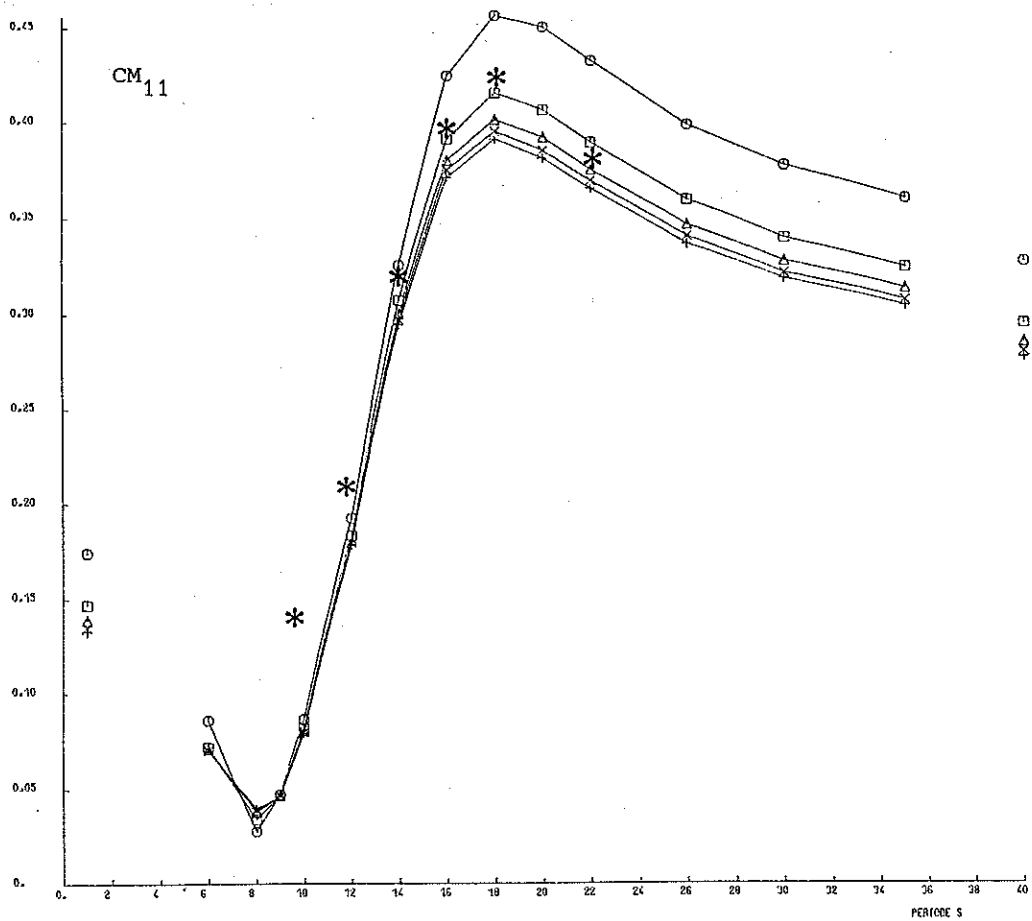


Figure 4.2

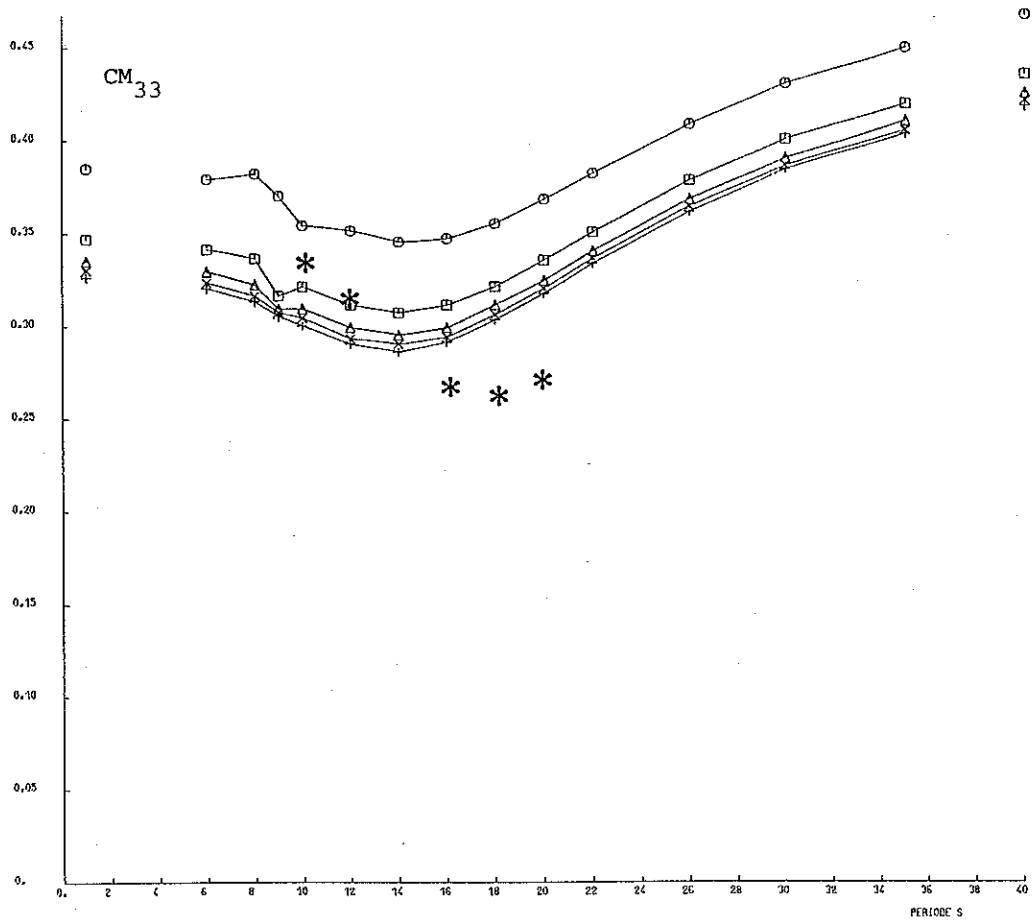


Figure 4.3

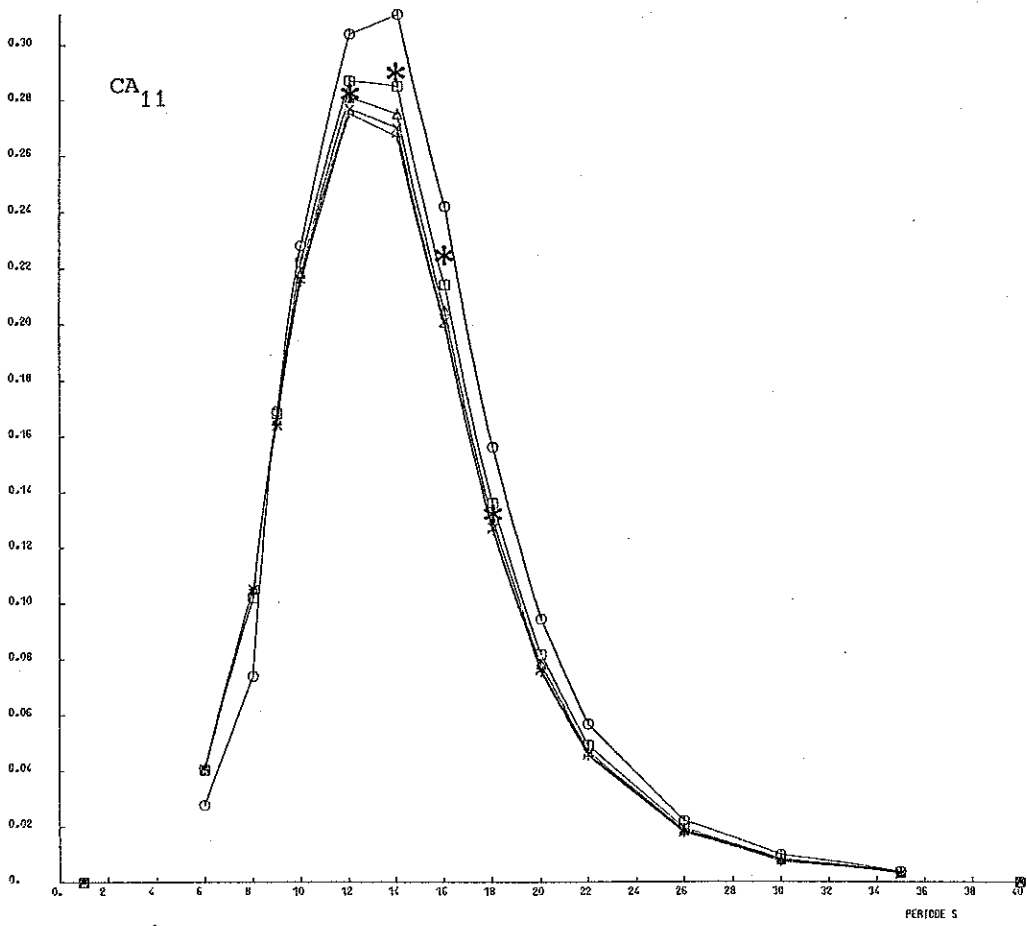


Figure 4.4

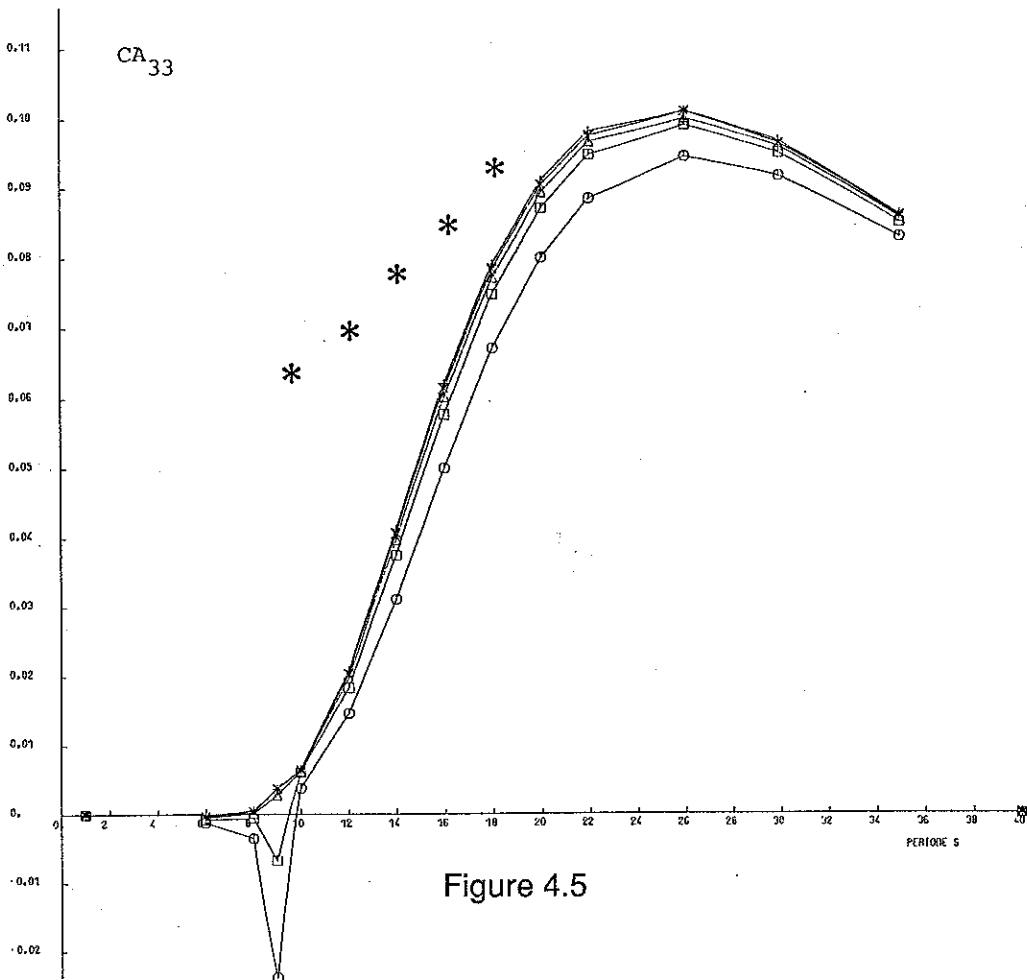


Figure 4.5

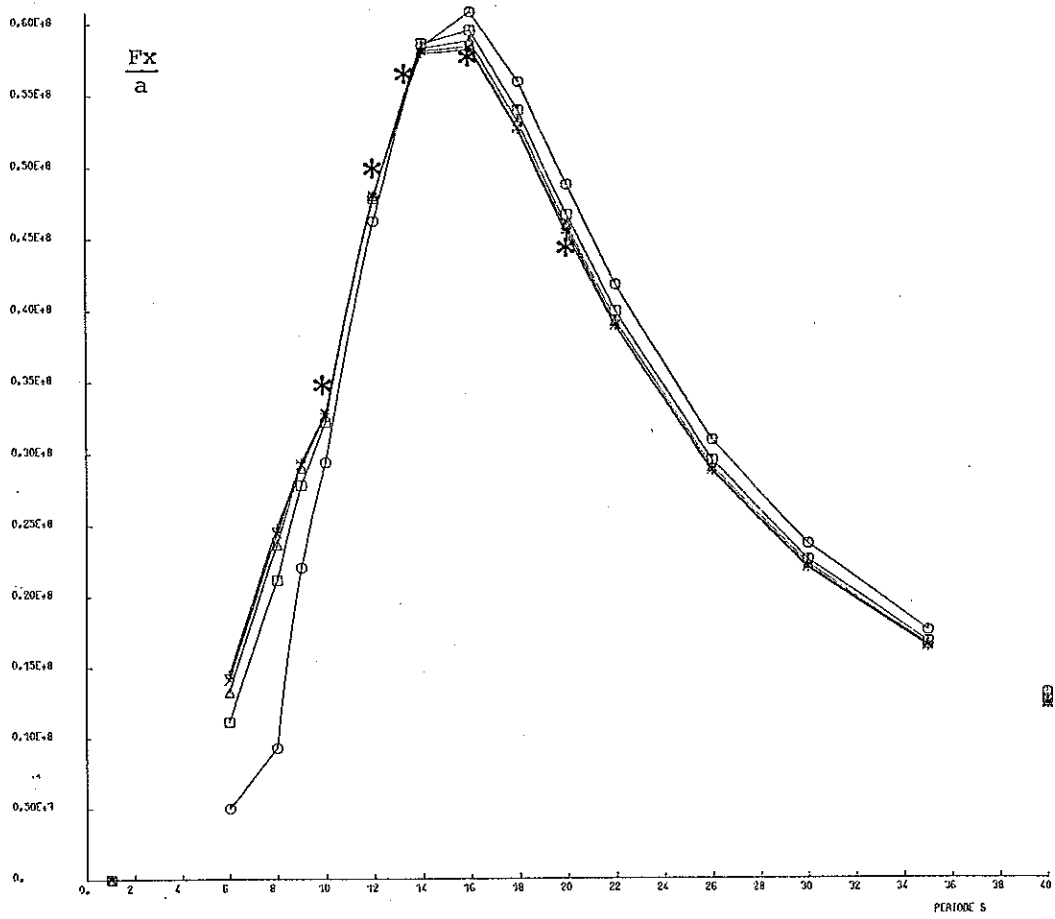


Figure 4.6

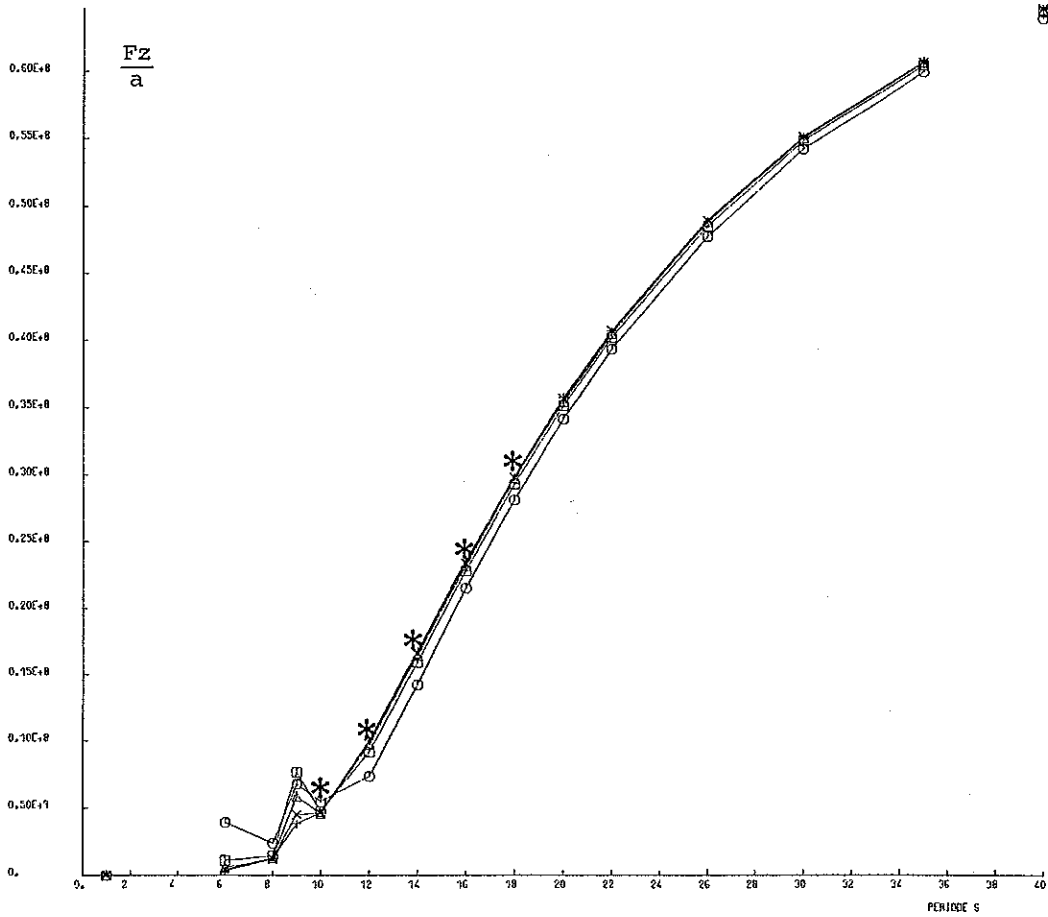


Figure 4.7

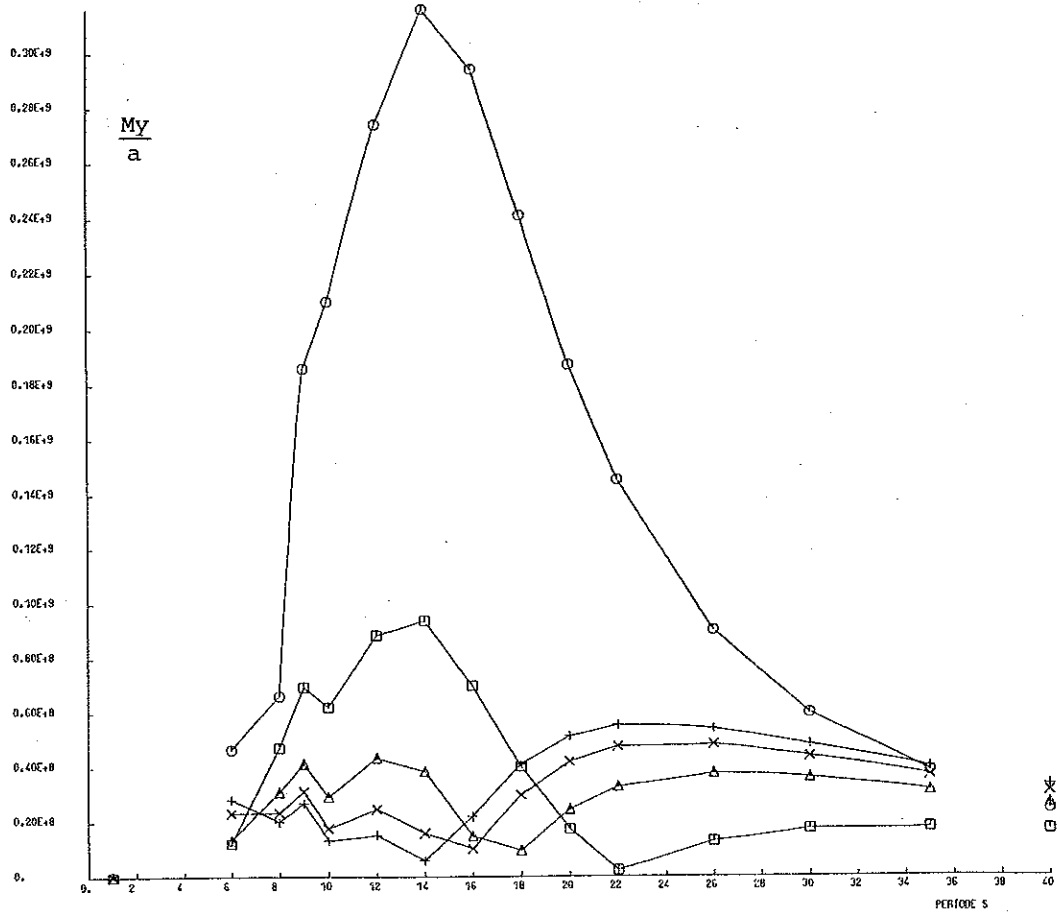


Figure 4.8

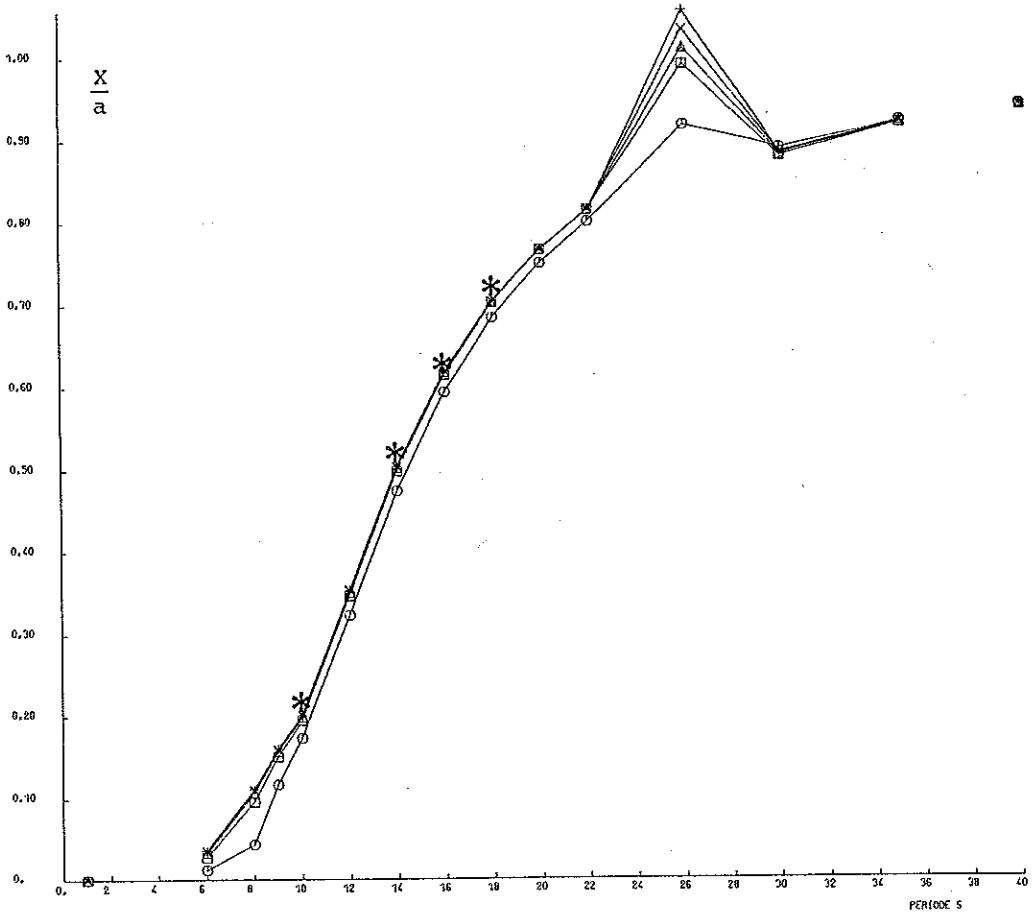


Figure 4.9

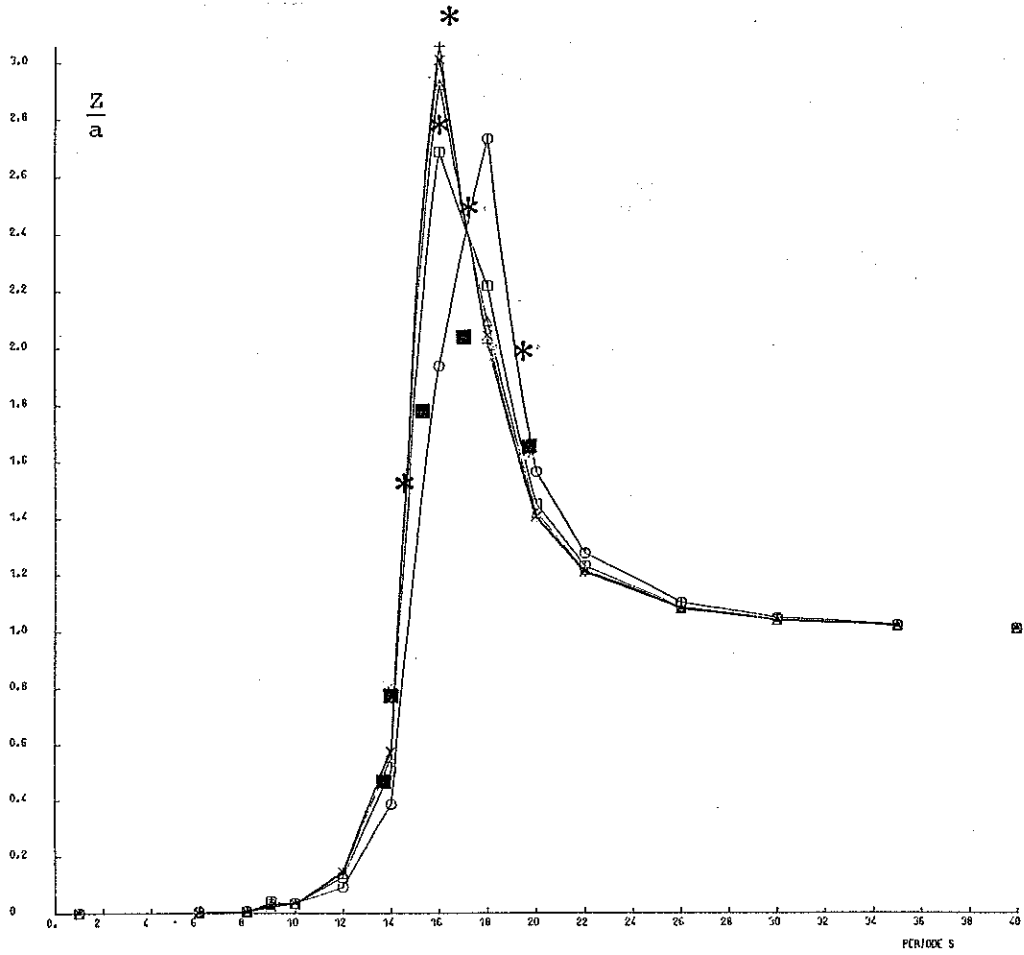


Figure 4.10

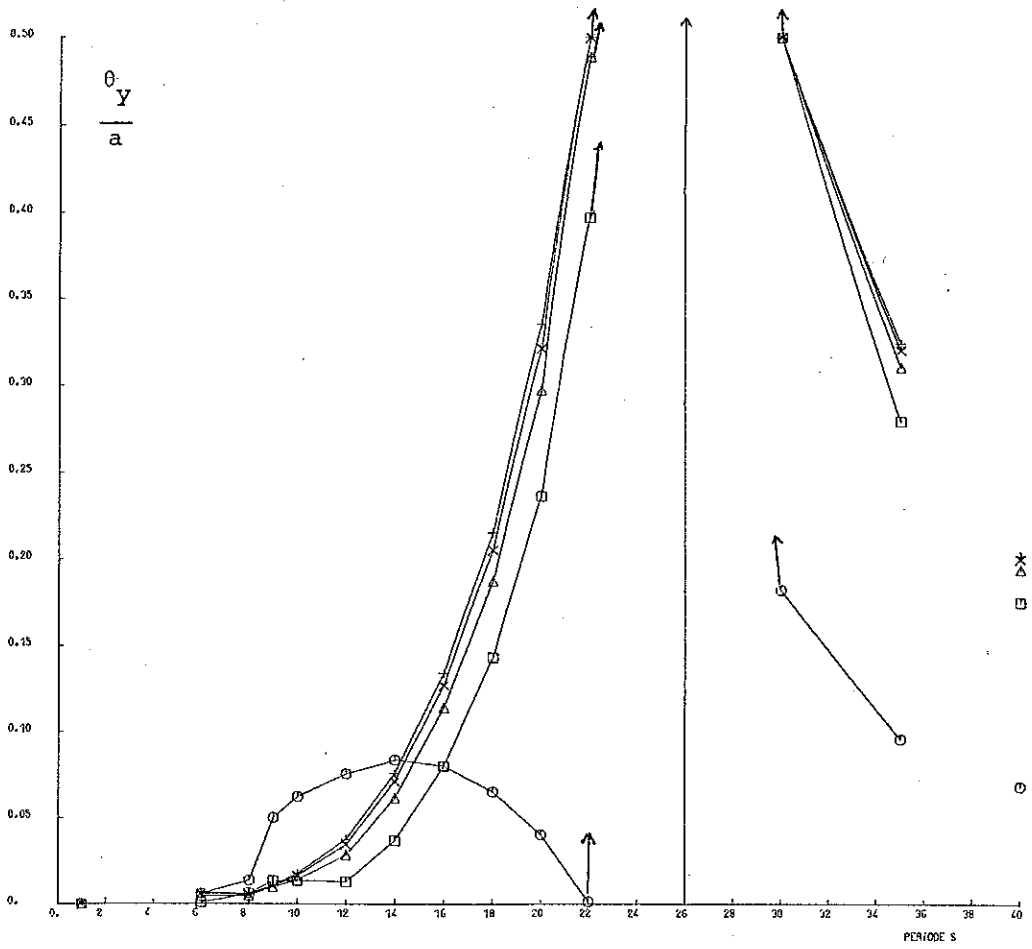


Figure 4.11

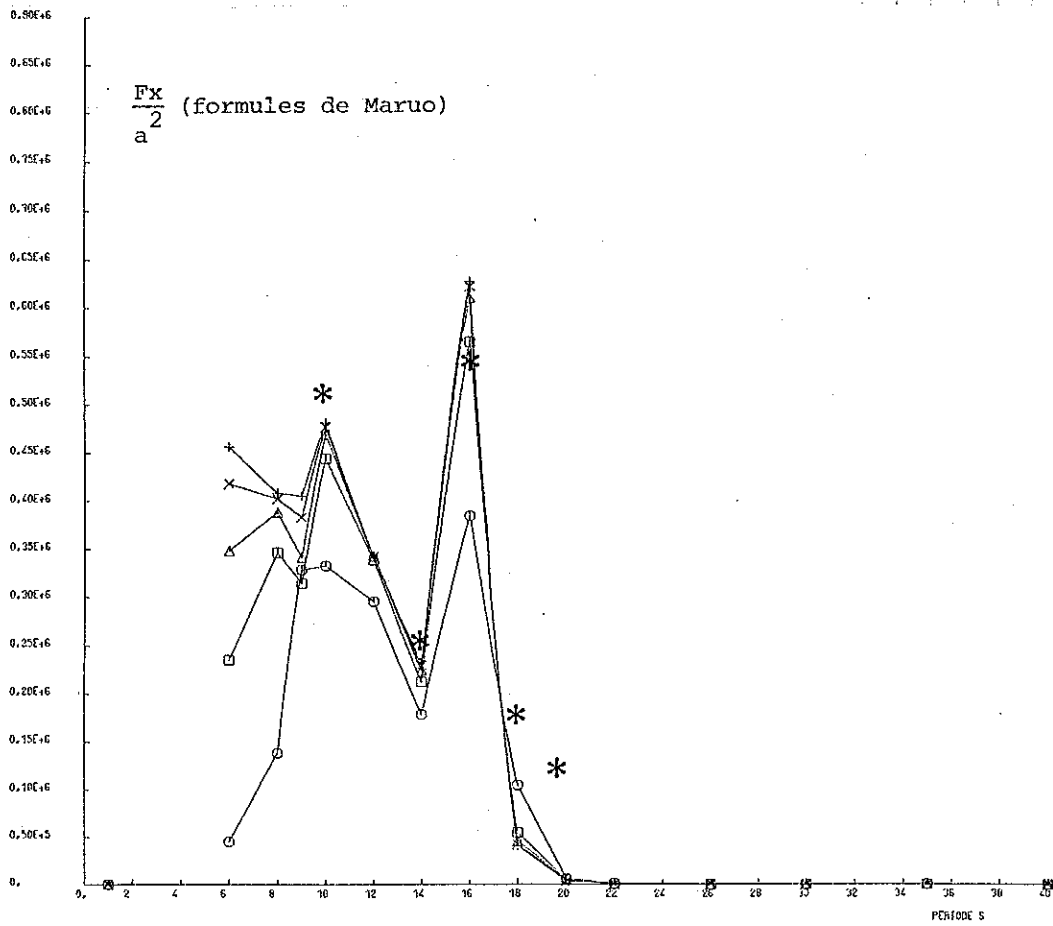


Figure 4.12

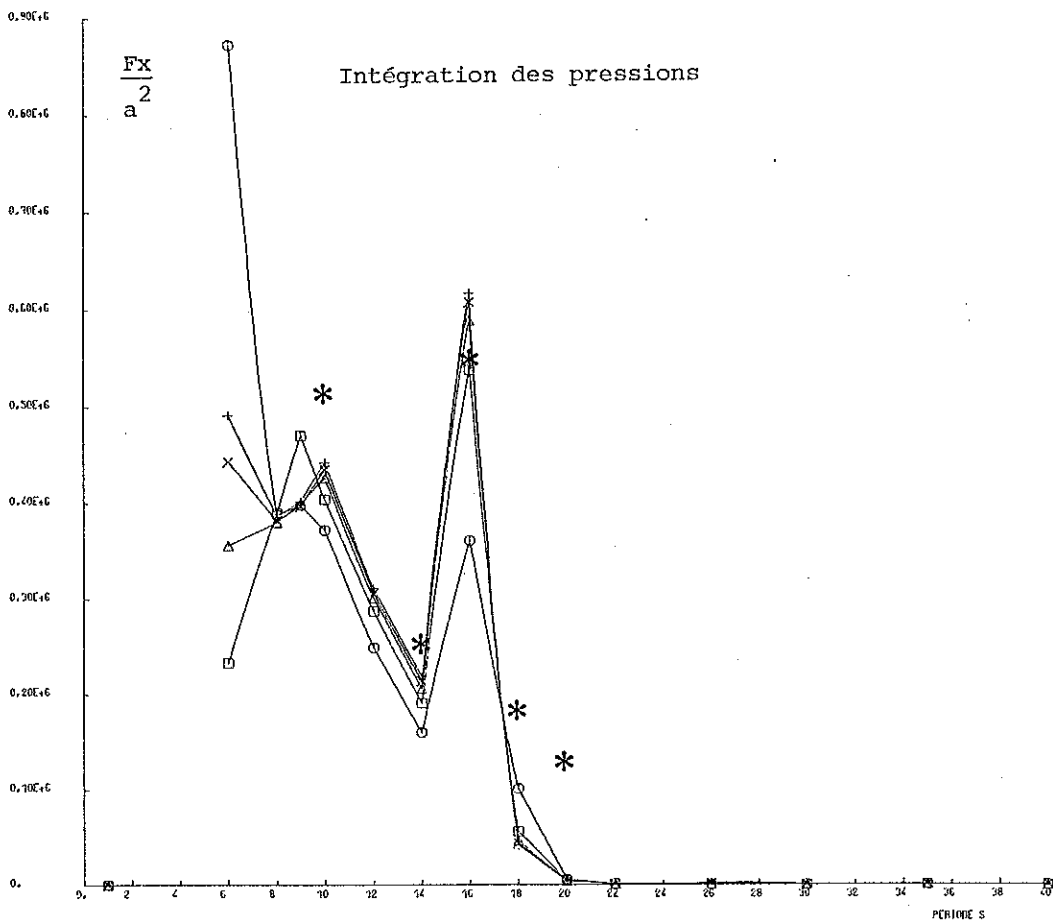


Figure 4.13

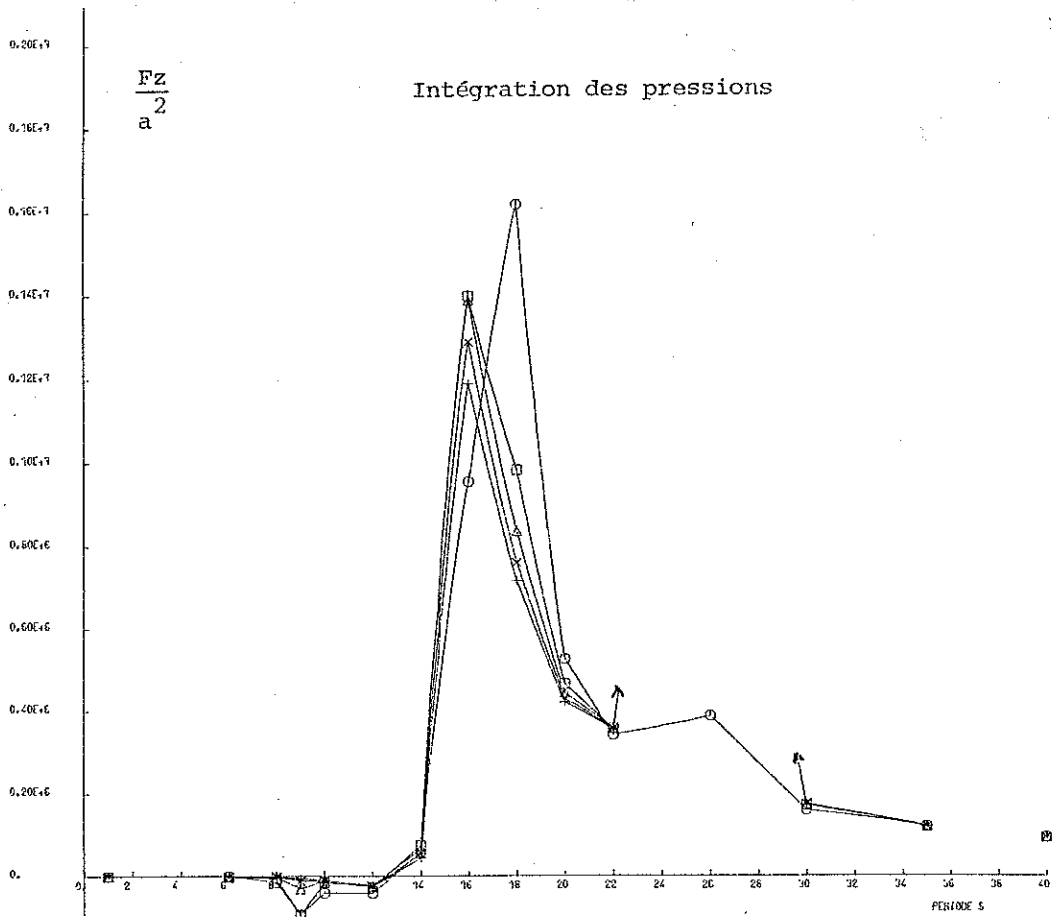


Figure 4.14

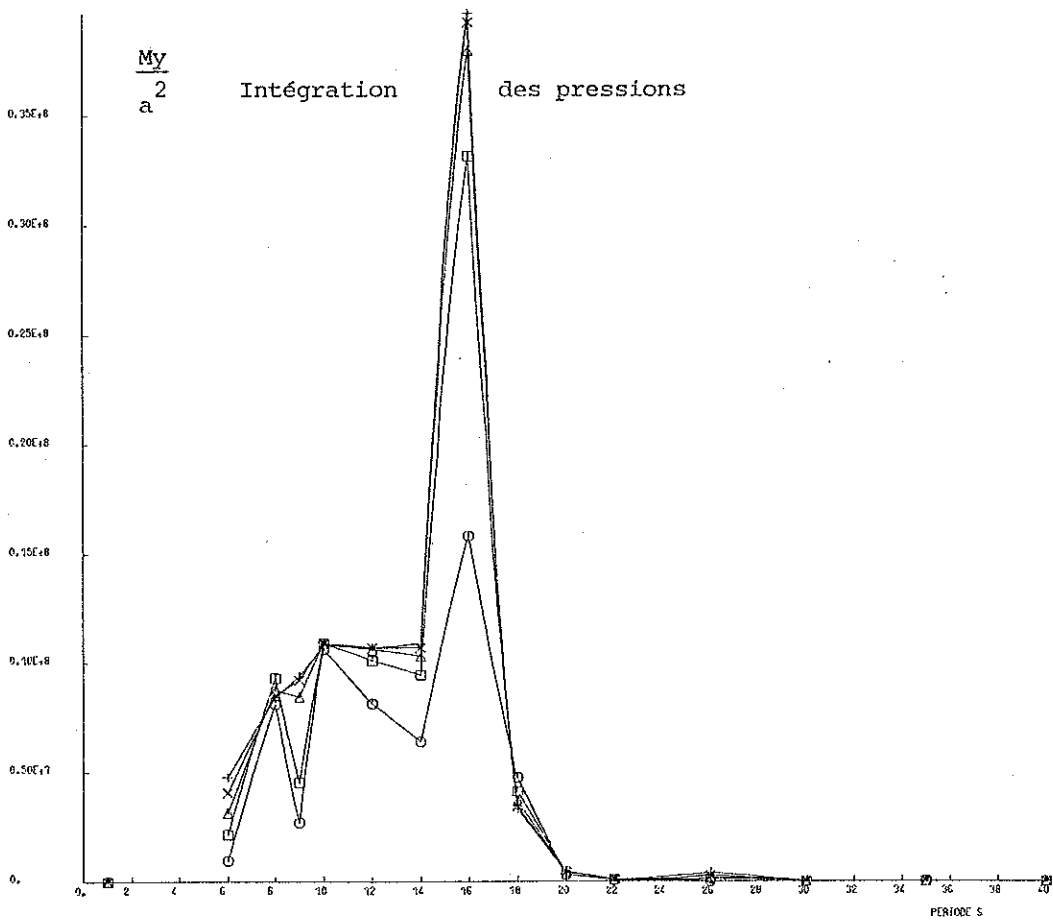


Figure 4.15

4.1.3. Analyse des résultats :

Pour les coefficients hydrodynamiques de masses ajoutées et d'amortissement, une discrétisation minimum de 54 facettes est nécessaire pour obtenir un début de convergence. On peut remarquer que cette discrétisation minimum est indépendante de la période, puisque les écarts sur les coefficients CM_{11} et CM_{33} sont du même ordre de grandeur lorsqu'on utilise les formulations asymptotiques pour $T=0$ et $T=\infty$. Pour les forces d'excitation, la convergence semble plus rapide, mais là aussi relativement indépendante de la période. On peut remarquer pour les discrétisations les plus grossières une anomalie de comportement aux environs de 9 s. Ce phénomène, qui s'estompe lorsqu'on raffine la discrétisation, correspond à une instabilité numérique due à la proximité d'une fréquence irrégulière comme nous le montrerons ultérieurement. Le moment de tangage ne semble converger vers une valeur limite que pour les deux discrétisations les plus fines. On doit remarquer que pour le mouvement de tangage d'une cuve parallélépipédique, le nombre de facettes donnant une contribution non nulle est faible, puisque seules les facettes du fond sont concernées, et que, par ailleurs les contributions des facettes situées de part et d'autre de l'axe de rotation se soustraient aux grandes longueurs d'ondes, ce qui apporte un facteur d'imprécision supplémentaire sur une grandeur qui, pour une telle structure, est faible.

Les mouvements de cavement et de pilonnement convergent rapidement, une discrétisation de 24 facettes semble suffisante sur la plus grande partie des courbes. La détermination précise de l'amplitude de la résonance en pilonnement demande au moins 54 facettes. Il en est de même pour le mouvement de tangage. On peut remarquer que pour celui-ci, à l'exception de la résonance à 26 s, l'amplitude reste très faible, moins de $0,5^\circ$ par m de houle. A la résonance, l'amplitude du tangage (104°) est telle que les couplages perturbent les autres mouvements, comme par exemple le cavement où l'on remarque pour une période de 26 s, un maximum correspondant au couplage cavement-tangage.

Pour cette période, la théorie utilisée pour résoudre le problème de diffraction-radiation n'est plus valable, l'hypothèse des réponses du même ordre de grandeur que les excitations étant prise en défaut.

Pour la force horizontale de dérive, on remarque un bon accord pour les deux formulations avec 54 facettes pour des périodes supérieures à 10s. Aux périodes inférieures, les deux méthodes ont tendance à donner des résultats convergents lorsqu'on augmente la discrétisation. Ceci montre que les grandeurs du second ordre sont beaucoup plus sensibles à la discrétisation que les grandeurs du premier ordre, la convergence, ainsi que l'accord entre les deux formulations nécessitant un nombre important de facettes par longueurs d'onde (> 10).

Pour la force de dérive verticale, ainsi que pour le moment de dérive en tangage, on ne dispose que de la formulation par intégration des pressions. Les constatations faites pour la force horizontale semblent confirmées par l'allure de la convergence en fonction de la discrétisation. On remarque l'influence de la résonance en tangage sur la force de dérive verticale à 26 s, le pic obtenu augmentant avec la discrétisation ($0,2 \cdot 10^7$; $0,4 \cdot 10^7$; $0,6 \cdot 10^7$ et $1 \cdot 10^8$ N pour les quatre discrétisations les plus fines). La force verticale présente autour de 9 s une anomalie de même type que celle constatée sur les masses d'eau ajoutées et les amortissements, qui disparaît lorsqu'on raffine la discrétisation.

En conclusion, pour étudier une structure de ce type, il faut utiliser au minimum 54 facettes pour décrire la moitié du corps. Ce minimum ne correspond pas directement à un nombre de facettes par longueur d'onde, mais plutôt au minimum nécessaire pour représenter correctement l'écoulement autour d'une structure présentant des angles vifs, puisque le comportement est le même avec les formulations asymptotiques. A la résonance des mouvements angulaires, les amplitudes sont telles que les hypothèses faites lors de l'établissement de la théorie ne sont plus satisfaites. Dès lors, les amplitudes calculées ne correspondent pas à celles que l'on mesurerait, d'autant plus que la théorie ne permet pas de tenir compte des amortissements visqueux. Il en est de même des couplages aux résonances qui sont exagérés dans des proportions importantes.

En résumé, on peut dire que ce type de programme permet de prédire les amplitudes des mouvements en dehors des résonances et de localiser celles-ci. Les efforts du second ordre sont, aux faibles périodes, beaucoup plus sensibles à la discrétisation que ceux du premier ordre, les deux formulations présentant un comportement semblable. Pour ces efforts, il faut non seulement satisfaire le critère précédent sur la description de l'écoulement autour d'une structure, mais aussi pouvoir disposer d'au moins 10 facettes par longueur d'onde, le plus astreignant de ces deux critères étant à retenir.

Les résultats expérimentaux sont en assez bon accord avec les calculs, à l'exception de ceux concernant le pilonnement. Les difficultés expérimentales, ainsi que la faible valeur du coefficient d'amortissement et l'absence de prise en compte des effets visqueux peuvent expliquer en partie les écarts. Pour les autres grandeurs, y compris les efforts de dérive, les résultats expérimentaux sont voisins de ceux calculés avec la discrétisation la plus fine.

4.2. DIFFRACTION DE LA HOULE PAR UN PIEU CYLINDRIQUE EN PROFONDEUR FINIE :

Le test suivant consiste à comparer les résultats obtenus par le programme AQUADYN avec des résultats obtenus par R.C. Mac Cami et R.A. Fuchs [85] et P.Guével [50] dans le cas d'un pieu cylindrique en profondeur finie uniforme.

4.2.1. Résultats analytiques :

Pour un pieu cylindrique de rayon R, avec un fond horizontal situé à $-h$ et sollicité par une houle cylindrique de période T et d'amplitude a, la force horizontale suivant la direction de propagation de la houle est donnée par :

$$F = F^* \cos \omega t + F^{**} \sin \omega t$$

avec :

$$CF_1^* = \frac{F^*}{4\rho g R h a} = -\frac{2h}{R} \frac{\text{th } M_0}{M_0^2} \frac{Y_0(M_0 \frac{R}{h}) - Y_2(M_0 \frac{R}{h})}{[J_0(M_0 \frac{R}{h}) - J_2(M_0 \frac{R}{h})]^2 + [Y_0(M_0 \frac{R}{h}) - Y_2(M_0 \frac{R}{h})]^2}$$

$$CF_1^{**} = \frac{F^{**}}{4\rho g R h a} = -\frac{2h}{R} \frac{\text{th } M_0}{M_0^2} \frac{J_0(M_0 \frac{R}{h}) - J_2(M_0 \frac{R}{h})}{[J_0(M_0 \frac{R}{h}) - J_2(M_0 \frac{R}{h})]^2 + [Y_0(M_0 \frac{R}{h}) - Y_2(M_0 \frac{R}{h})]^2}$$

avec :

$$\omega = 2\pi/T \quad , \quad k_0 = \omega^2/g$$

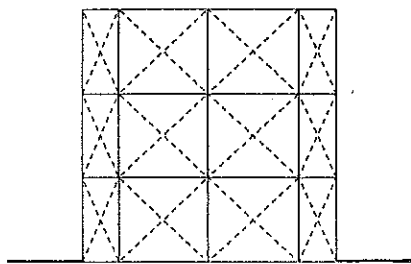
m_0 solution de $m_0 \text{ th } m_0 h = k_0$, $M_0 = m_0 h$, $K = k_0 h$

J_0 et J_2 étant les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre 0 et 2,

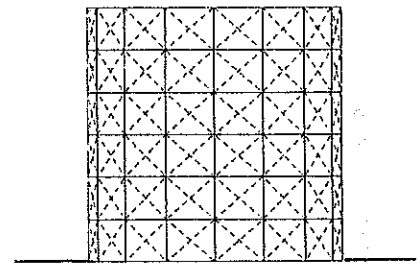
Y_0 et Y_2 les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre 0 et 2.

4.2.2. Résultats numériques :

Un pieu cylindrique de rayon $R=h/2$ a été discrétisé de deux façons différentes. Compte tenu de la symétrie par rapport à xOz , la moitié du cylindre a été décrite. Le découpage utilisé est un découpage régulier en N_z facettes sur la hauteur et N_θ facettes dans le plan horizontal. Les deux discrétisations utilisées correspondent à 12 facettes ($N_\theta = 4, N_z = 3$) et 48 facettes ($N_\theta = 8, N_z = 6$). Les figures ci-dessous montrent la vue de coté du maillage, les diagonales des facettes étant représentées en pointillés.



12 facettes



48 facettes

Figure 4.16

La comparaison entre les résultats analytiques et numériques est effectuée pour les coefficients :

$$KCF^* = \frac{F^*}{\rho g a h^2} \quad \text{et} \quad KCF^{**} = \frac{F^{**}}{\rho g a h^2}$$

K étant le nombre d'onde adimensionnalisé par rapport à la profondeur. La correspondance entre les valeurs de K , la période, la longueur d'onde pour $h = 1$ m et le nombre de facettes par longueur d'onde pour les deux discrétisations est donnée dans le tableau suivant :

K	0,1	0,5	1	2	3	4	5
T_s	6,344	2,837	2,006	1,419	1,158	1,003	0,897
λ_m	19,537	8,142	5,236	3,043	2,087	1,571	1,257
$\frac{N\theta}{\lambda}$ (12 fac)	49,6	20,7	13,3	7,7	5,3	4	3,2
$\frac{N\theta}{\lambda}$ (48 fac)	99,3	41,5	26,7	15,5	10,6	8	6,4

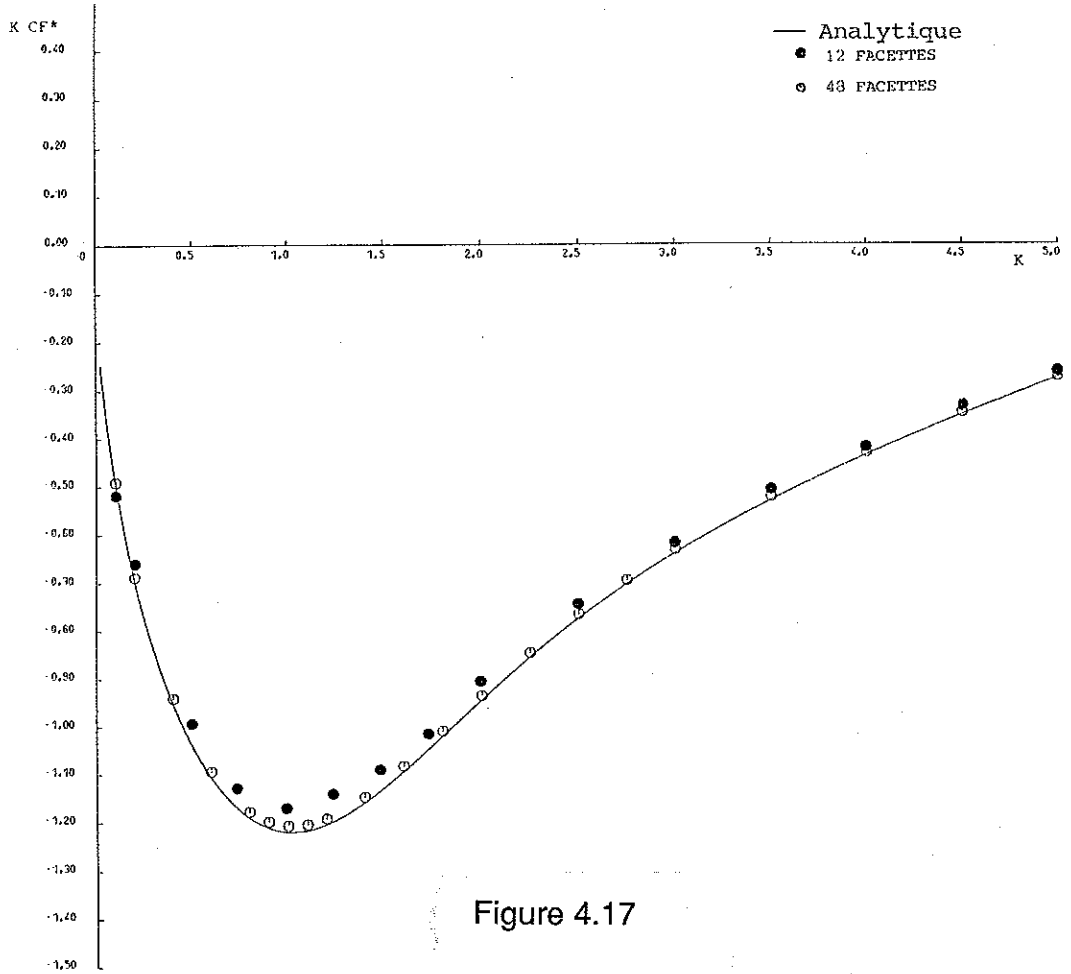


Figure 4.17

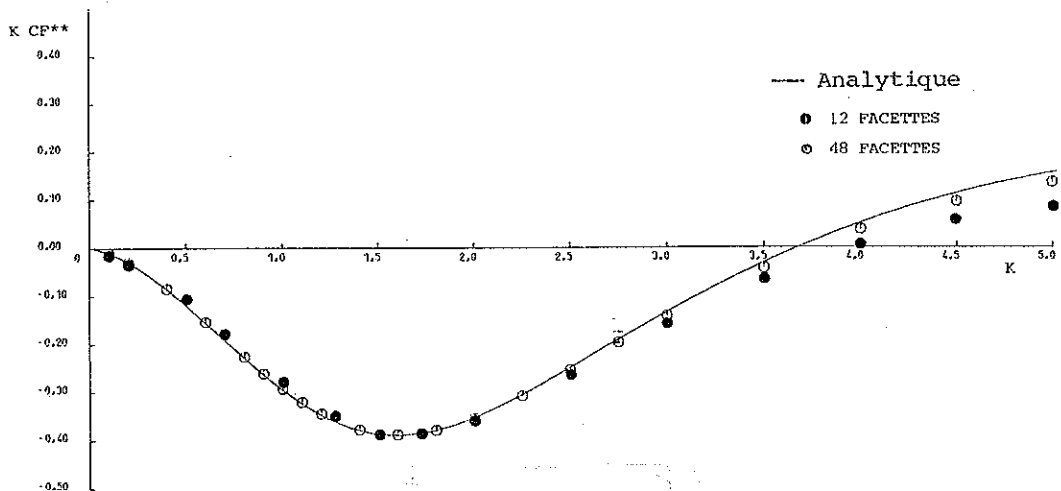


Figure 4.18

4.2.3. Analyse des résultats :

Pour la discrétisation la plus grossière, on remarque que l'écart par rapport à la solution théorique augmente lorsque le nombre de facettes par longueur d'onde diminue, la divergence devenant sensible à partir de $K=3$. Les écarts constatés pour des nombres d'onde plus faibles correspondent plutôt à une mauvaise représentation de la géométrie du corps, puisque le cercle est discrétisé suivant un octogone.

Pour la discrétisation la plus fine, la géométrie du corps semble bien représentée, et la courbe analytique est approchée à quelques pour cent jusqu'à un nombre d'onde de $K=4$. A partir de celui-ci, le comportement est semblable à celui de la discrétisation précédente, avec un écart beaucoup plus faible par rapport à la courbe théorique.

Ces résultats confirment la validité de la formulation employée en profondeur finie. L'accord avec les résultats analytiques est satisfaisant si l'on respecte les critères de représentation de la géométrie du corps et de nombre minimum de facettes par longueur d'onde dans les mêmes conditions qu'en profondeur infinie.

4.3. EFFORTS DE DERIVE SUR UNE DEMI-SPHERE :

Nous allons comparer les deux formulations possibles pour les efforts de dérive aux résultats analytiques obtenus par K.Kudou en 1977 [78] dans le cas d'une demi-sphère libre en profondeur infinie.

4.3.1. Description du test :

Une demi-sphère, de rayon $R = 1$ m, a été découpée régulièrement en N_θ facettes sur un demi-parallèle et N_ψ facettes sur un demi-méridien. Le nombre total de facettes du découpage est $2 \cdot N_\theta \cdot N_\psi$, dont $N_\theta \cdot N_\psi$ pour la partie décrite.

Le volume immergé, ainsi que les coefficients de rappel hydrostatique, ont été calculés d'après la discrétisation. Les inerties ont été déterminées en supposant la masse uniformément répartie sur la surface immergée.

L'allure de la discrétisation pour $N_\theta=6$ et $N_\psi=5$ est indiquée sur le schéma ci-dessous :

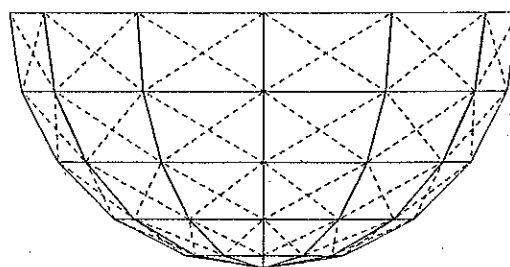


Figure 4.19

Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats obtenus par M. Le Boulluec [82] aux formulations analytiques de K. Kudou. Les courbes représentent les efforts de dérive adimensionnels ($F/\rho g R a^2$ où a est l'amplitude de la houle incidente) en fonction de $kR = \omega^2 R/g$. Les calculs ont été effectués pour $kR = 0,75 ; 1,25 ; 1,5 ; 2$.

Dans un deuxième temps, pour une période de houle de 1,59 s correspondant à une demi-longueur d'onde sur un diamètre de la sphère, nous avons fait varier systématiquement la discrétisation en θ et en ψ [23]. Les résultats sont présentés sous la forme d'un tableau, les efforts de dérive étant calculés pour un fluide de masse volumique 1.000 kg/m^3 .

4.3.2. Résultats :

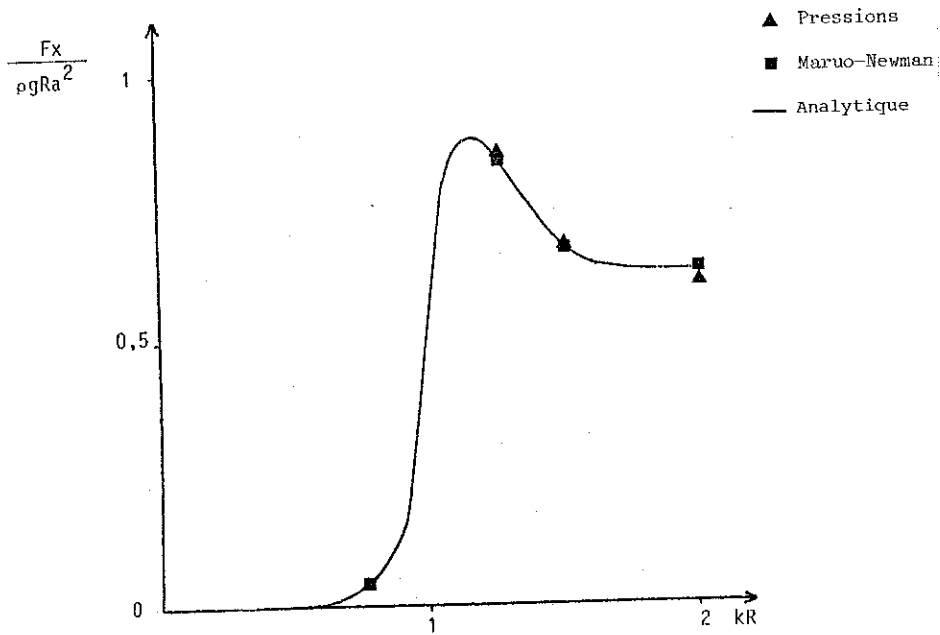


Figure 4.20

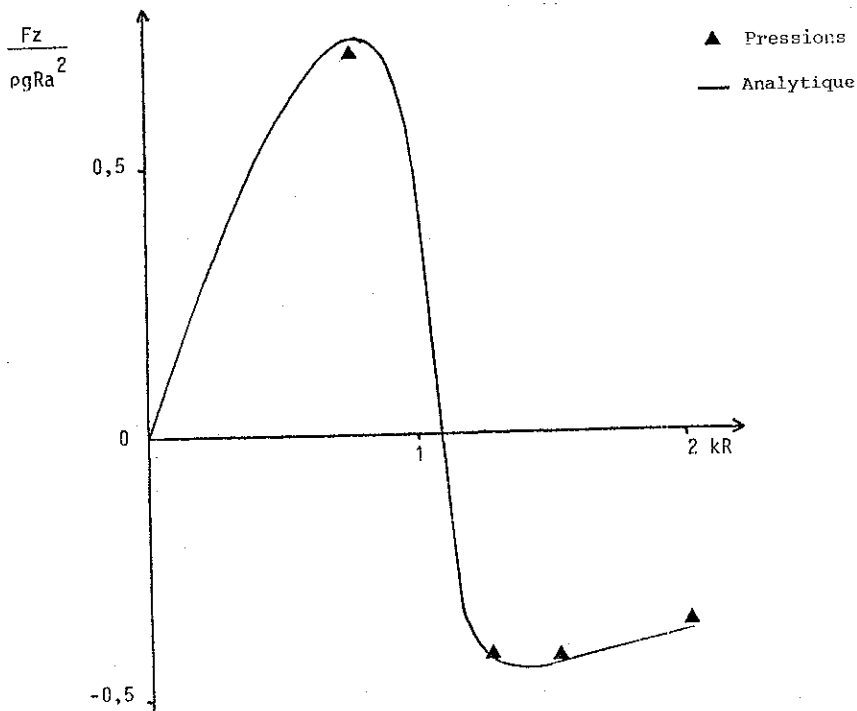


Figure 4.21

			Mouvements		Forces de dérive (second ordre)				
N_θ	N_ψ	N	$\frac{X}{a}$	$\frac{Z}{a}$	Mar.New	Press.	Press.	Press.	
			m/m	m/m	$\frac{F_x}{a^2}$ N/m ²	$\frac{F_x}{a^2}$ N/m ²	$\frac{F_z}{a^2}$ N/m ²	$\frac{M_y}{a^2}$ Nxm/m ²	
E = 1,505	12	12	288	0,311	0,407	6,34E3	6,24E3	-4,11E3	2,74E1
	12	10	192	0,310	0,413	6,33E3	6,28E3	-4,07E3	2,46E1
	10	10	200	0,312	0,411	6,32E3	6,18E3	-4,08E3	3,94E1
	10	6	120	0,310	0,423	6,30E3	6,22E3	-4,03E3	3,39E1
	8	8	128	0,313	0,418	6,28E3	6,10E3	-4,04E3	6,16E1
	8	5	96	0,312	0,427	6,27E3	6,13E3	-4,00E3	5,79E1
	6	6	72	0,316	0,434	6,21E3	5,92E3	-3,92E3	1,09E2
	6	4	48	0,313	0,460	6,20E3	5,96E3	-3,84E3	9,97E1
	5	3	30	0,314	0,508	6,16E3	5,83E3	-3,64E3	-1,40E2
	4	2	16	0,313	0,660	6,21E3	5,61E3	-2,75E3	2,10E2

Valeurs théoriques

0,40	6,28E3	6,28E3	-4,22E3	0
------	--------	--------	---------	---

 [78]

4.3.3. Analyse des résultats :

Il ressort de l'ensemble des résultats que les deux formulations permettent de retrouver les résultats analytiques avec une bonne précision.

Pour une période donnée, lorsqu'on fait varier la discrétisation, la formulation de Maruo-Newman semble plus stable que celle par intégration des pressions.

Dans le tableau, nous avons fait figurer les valeurs du moment de tangage M_y , qui, théoriquement, devrait être nul pour une sphère, puisque les normales sont dirigées vers le centre. Cette propriété n'étant pas satisfaite sur le corps discrétisé, on obtient un moment résiduel M_y d'autant plus faible que la géométrie du corps est mieux respectée.

4.4. EFFORTS DE DERIVE SUR UN ENSEMBLE DE CORPS [23] :

Dans le cas d'un ensemble de corps, on peut comparer de même la résultante des efforts obtenue par la formulation de Maruo-Newman à la somme des efforts partiels issus de l'intégration de pressions sur chaque corps.

4.4.1. Description du test :

Deux demi-sphères, identiques à celle décrite en 4.3 ont été disposées symétriquement par rapport à l'axe Ox , les centres étant situés à une distance d ($d > 2m$) l'un de l'autre. Chaque demi-sphère a été discrétisée en 60 facettes (12 sur un parallèle et 5 sur un demi-méridien) comme indiqué ci-dessous :

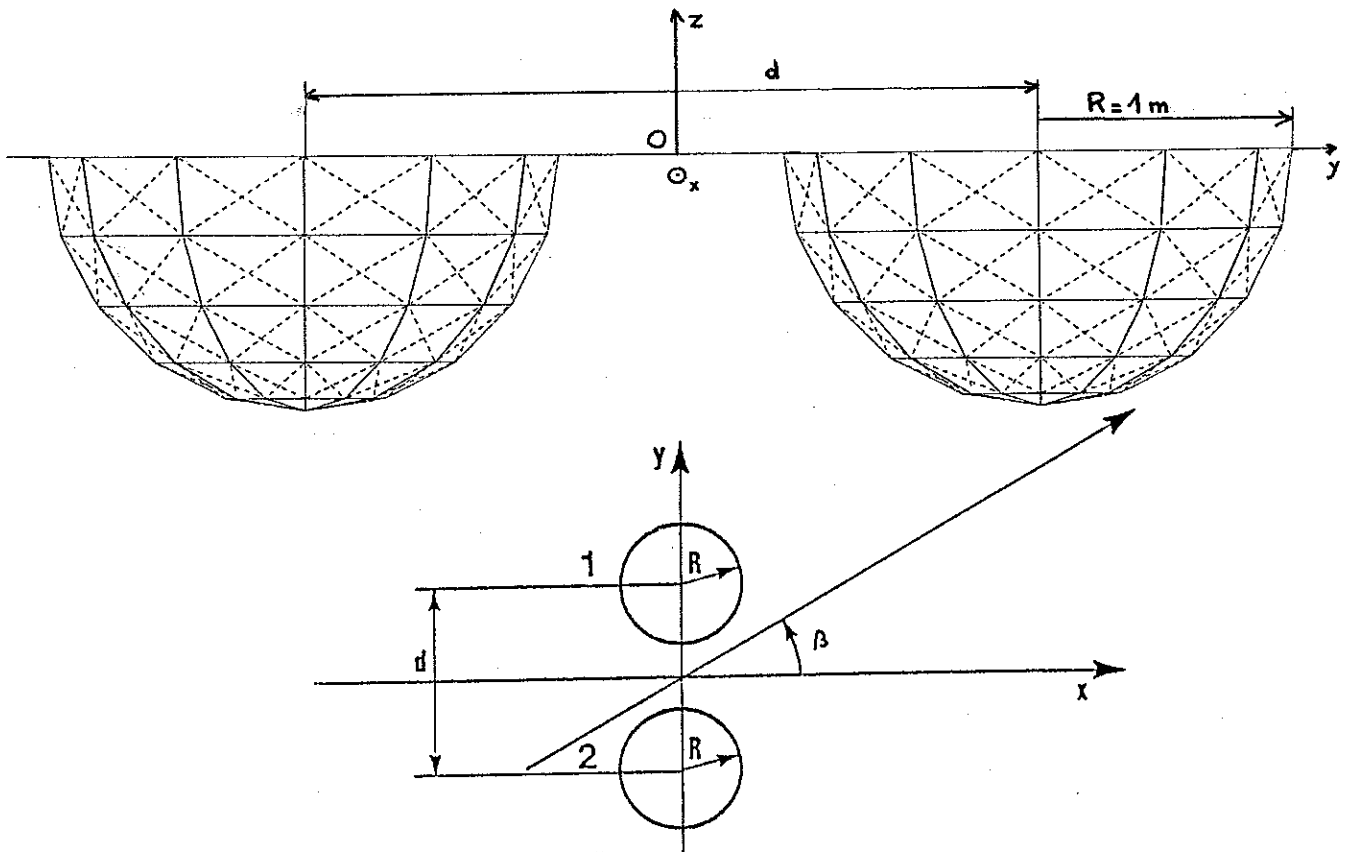


Figure 4.22

Les calculs ont été effectués avec cette discrétisation pour 5 valeurs de la distance d (2,2 m ; 2,5 m ; 3 m ; 4 m ; 6 m) , deux valeurs de l'angle d'incidence de la houle (0° et 45°), et 7 valeurs de la période (4 s ; 2,83 s ; 2,32 s ; 2 s ; 1,79 s ; 1,64 s ; 1,42 s). Pour une période de 1,79 s, les calculs ont été repris avec une discrétisation plus fine (144 facettes, 24 facettes sur un parallèle, 6 sur un demi-méridien). Les résultats sont présentés sous forme de courbes, l'axe des x étant gradué en échelle inverse de la distance d , $d = \infty$ correspondant à une demi-sphère seule.

Les efforts de dérive sont calculés dans un fluide de masse volumique 1000 kg/m^3 .

4.4.2. Résultats :

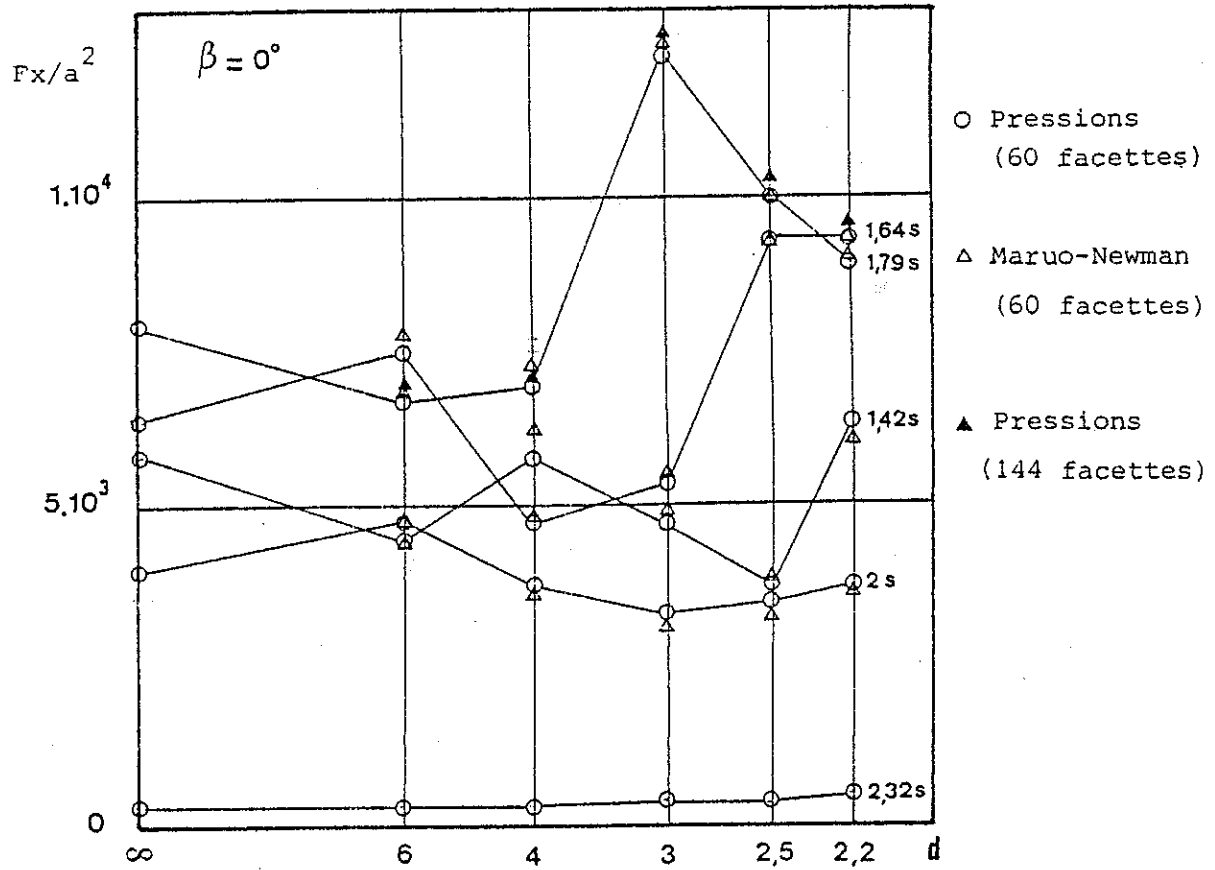


Figure 4.23

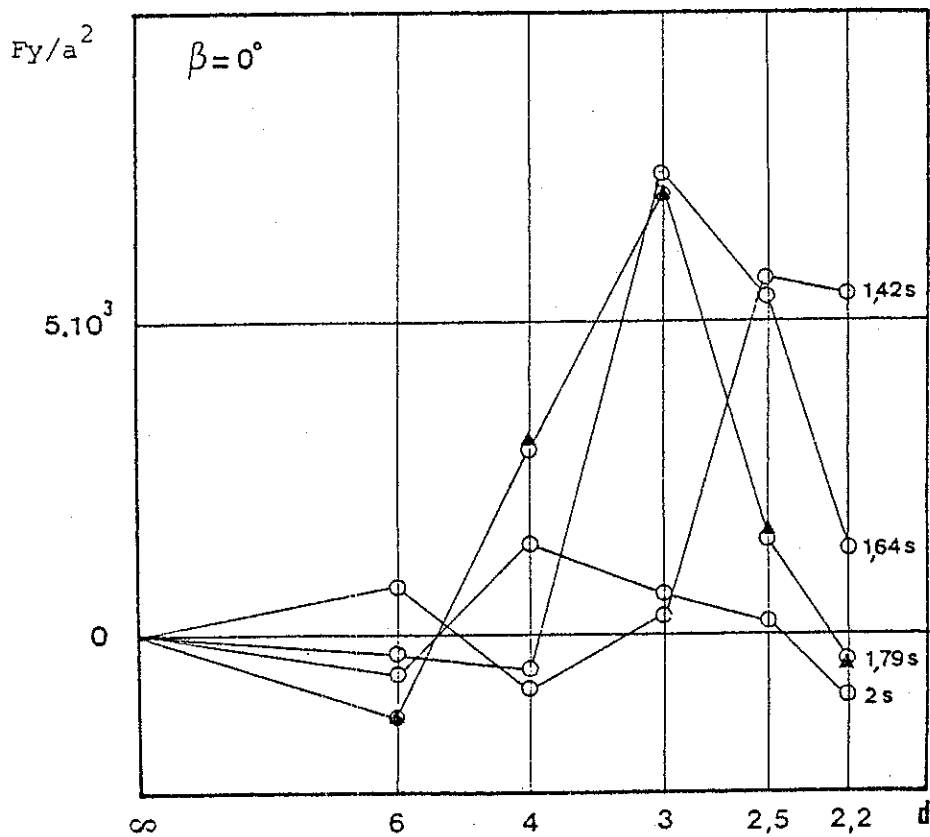


Figure 4.24

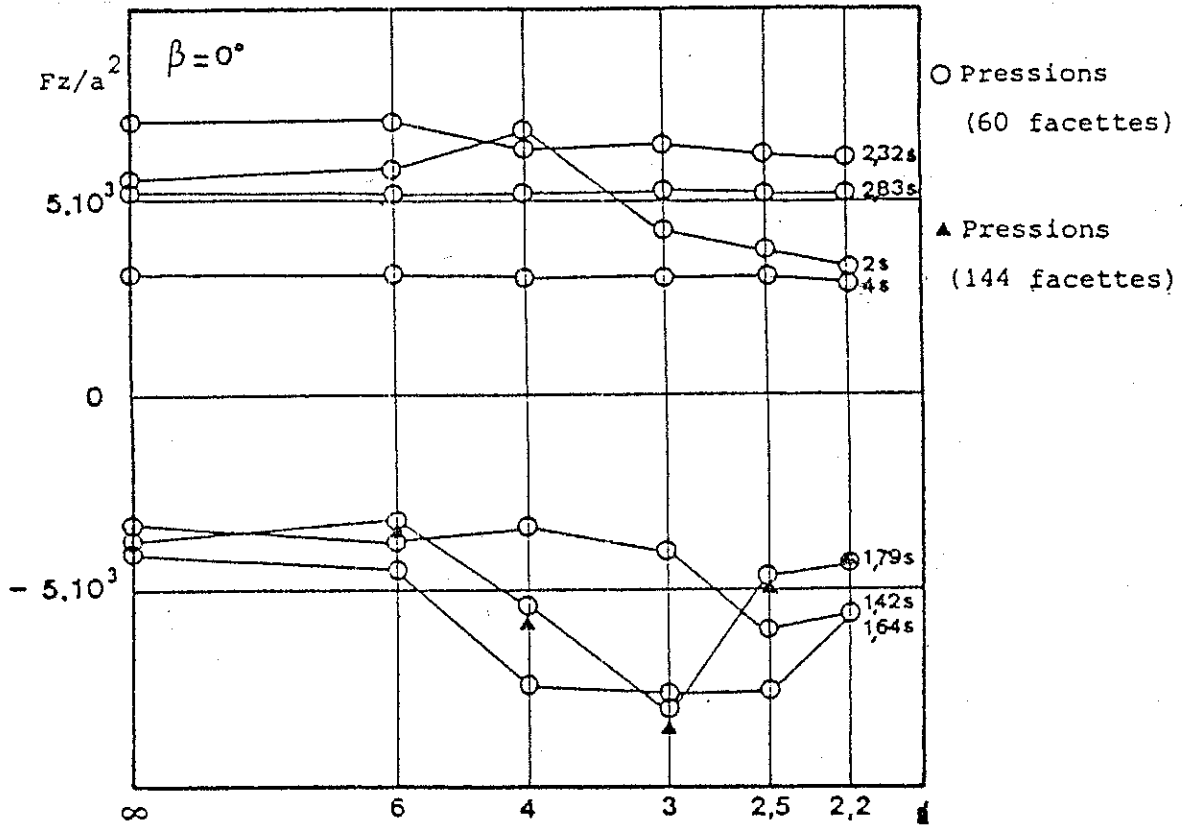


Figure 4.25

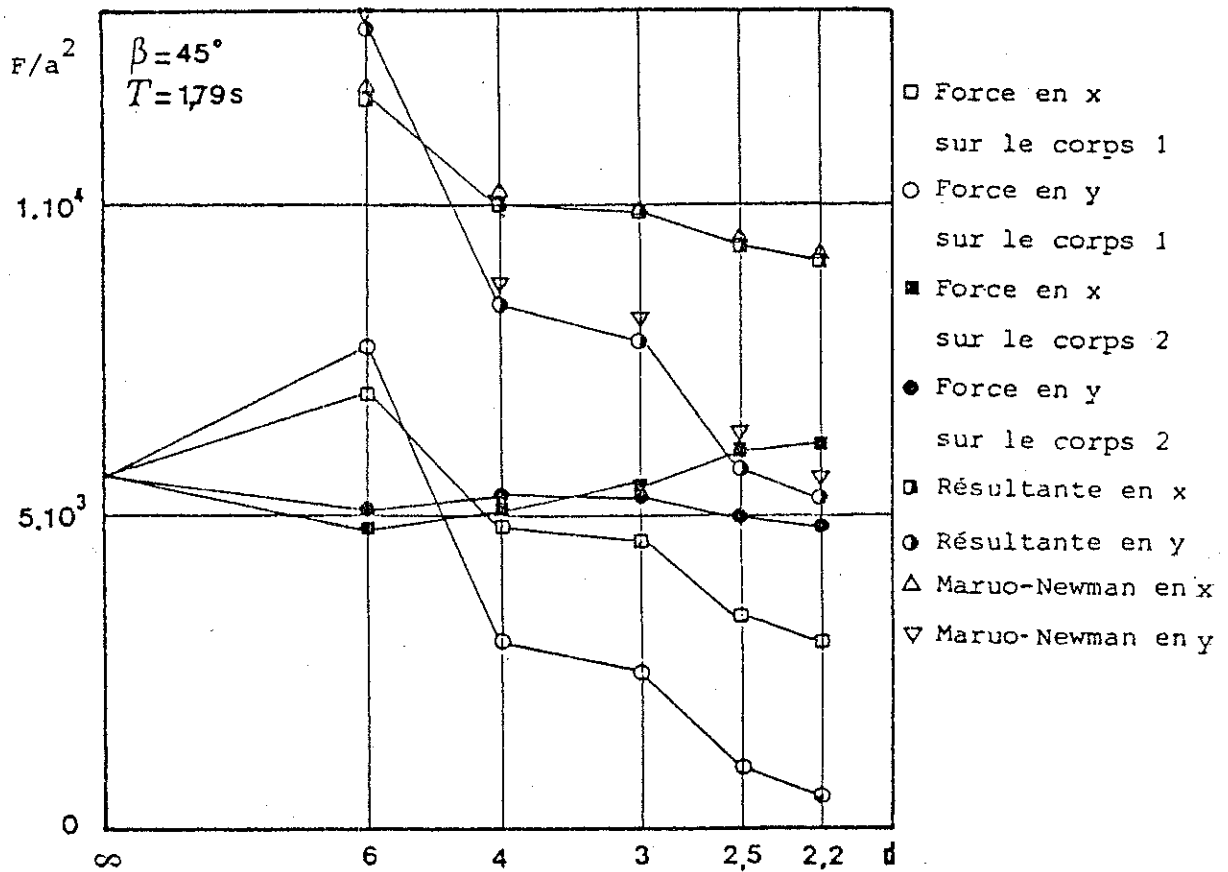


Figure 4.26

4.4.3. Analyse des résultats :

Pour un angle de houle de 0° , la force de dérive en x sur un corps est égale à la moitié de la force en x sur l'ensemble, il est donc possible de comparer directement les résultats de deux formulations. On remarque un bon accord, les écarts étant du même ordre de grandeur que pour un seul corps. L'influence de la présence de l'autre demi-sphère est d'autant plus importante que la période diminue. Par ailleurs, la discrétisation en 60 facettes est peut-être insuffisante pour les faibles périodes lorsque les corps sont proches.

La force en y sur le corps 1 dans les mêmes conditions ne peut être calculée que par intégration des pressions. Cette force change de signe en fonction de la distance et de la période, de plus, un phénomène de résonance entre les corps apparaît à une distance d'autant plus faible que la période diminue.

Ces deux courbes sont très oscillantes en fonction de la distance et de la période, ce qui indique un phénomène de résonance entre les corps analogue aux effets de paroi lors d'essais sur houle en bassin étroit [13].

La force de dérive verticale présente un comportement un peu plus régulier en fonction de la distance, par contre elle change de signe avec la période, comme dans le cas d'une demi-sphère seule.

Pour une période de houle de 1,79 s et un angle de 45° , nous avons représenté les forces en x et y sur chaque corps, leur résultante et les résultats de la formulation de Maruo-Newman. Là encore, on constate un bon accord des deux formulations pour la résultante des efforts.

Dans tous les cas traités, on note l'importance des interactions entre les deux corps, et l'importance des forces verticales. Ceci confirme la nécessité de disposer d'une formulation permettant de calculer ces efforts.

4.5. EFFORTS DE DERIVE SUR UNE BARGE EN PROFONDEUR FINIE :

La barge testée est celle utilisée initialement par J.A. Pinkster au N.S.M.B. (Netherlands Ship Model Basin), pour laquelle on dispose de nombreux résultats théoriques et expérimentaux [98] [104].

4.5.1. Description du test :

Les caractéristiques de cette barge sont les suivantes :

Longueur : $L = 150$ m
Largeur : $B = 50$ m
Tirant d'eau : $T = 10$ m

Rayons de giration pour le calcul des inerties:

- En roulis : $R_R = 20$ m
- En tangage : $R_T = 39$ m
- En lacet : $R_L = 39$ m

Les calculs ont été effectués avec une profondeur d'eau de 50 m, les mouvements et les efforts étant calculés par rapport au centre de gravité situé au centre de flottaison de la barge ($x_G = 0$, $y_G = 0$, $z_G = 0$).

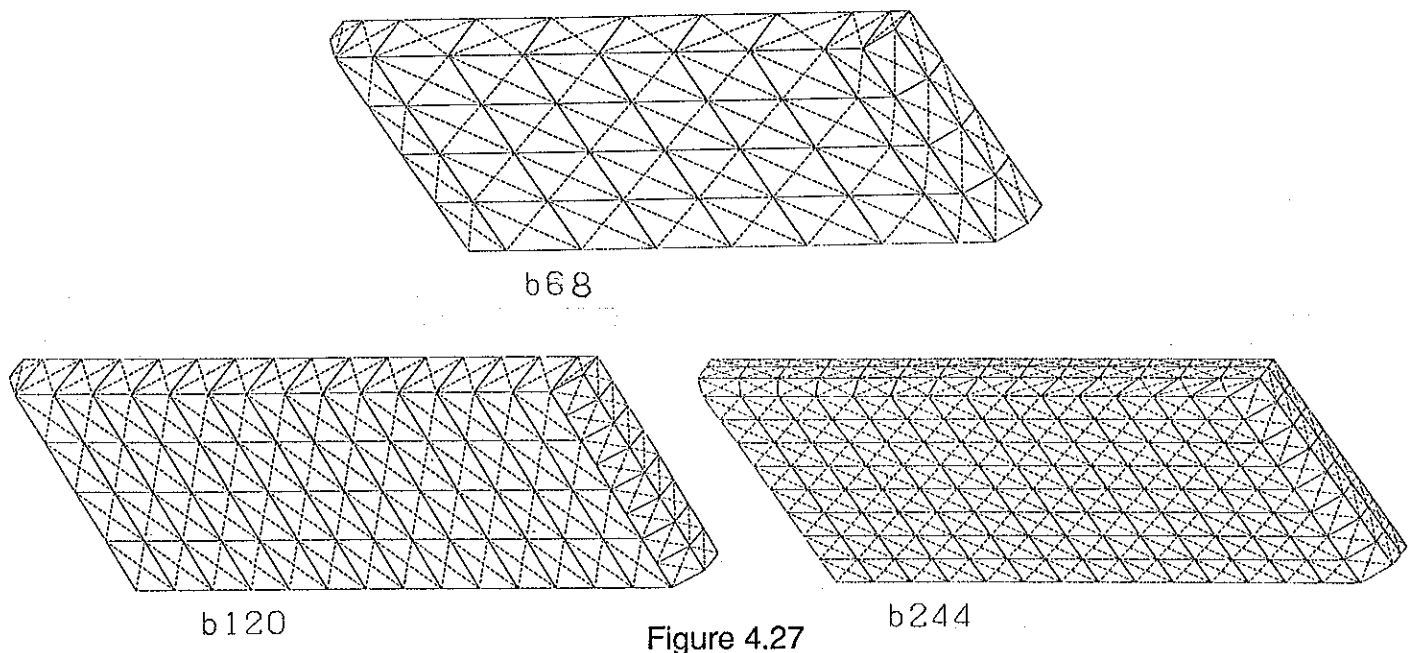
La moitié décrite de la barge a été discrétisée en 34 facettes, 60 facettes et 122 facettes, ce qui correspond respectivement à 68, 120 et 244 facettes au total.

La discrétisation en 68 facettes n'a été utilisée que comme test des formulations des efforts de diffraction et pour illustrer un calcul particulier de mouvement.

Le calcul des efforts de dérive a été réalisé principalement avec la discrétisation en 120 facettes, qui est voisine de celles employées par Pinkster (128 facettes) et le N.M.I. (National Maritime Intitute) (128 facettes réparties différemment). La discrétisation en 244 facettes a été utilisée pour tester la convergence des résultats, le nombre de facettes par longueur d'onde est voisin de celui pour 120 facettes, mais la surface moyenne des facettes est plus faible, ce qui permet une meilleure représentation de l'écoulement autour du corps.

Les résultats obtenus pour les mouvements sont pratiquement identiques, aux points de calcul, à ceux de Pinkster. Nous nous intéresserons donc aux efforts de dérive horizontaux et verticaux pour des angles de houle de 180° et 90° .

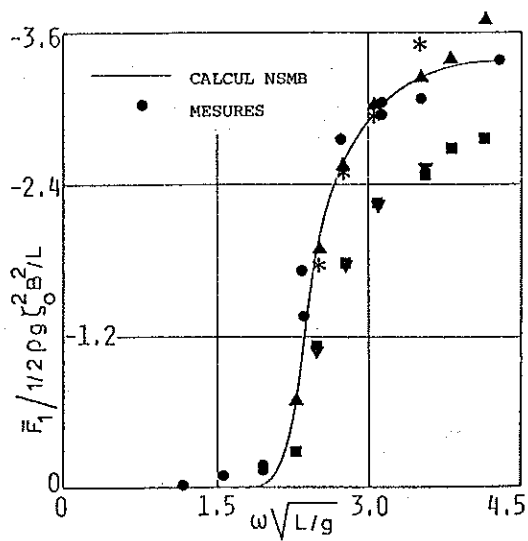
Les figures ci-dessous montrent les différentes discrétisations utilisées, les pointillés indiquant les diagonales des facettes.



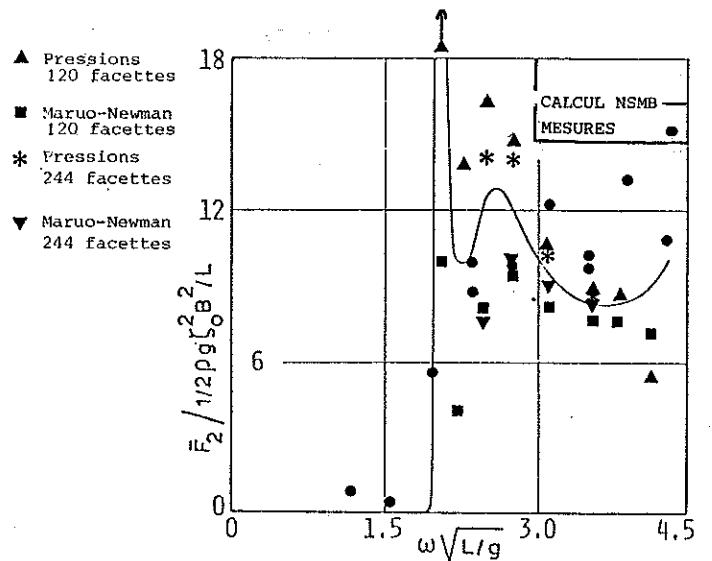
Le tableau suivant indique les périodes de calcul, le paramètre $\omega \sqrt{L/g}$ correspondant, et le nombre de facettes par longueur d'onde pour les différentes discrétisations.

T_s	6	6,5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\omega\sqrt{\frac{L}{g}}$	4,09	3,78	3,51	3,07	2,73	2,46	2,23	2,05	1,89	1,75	1,64
$\frac{N_F}{\lambda}$ B68	2,8	3,3	3,8	5	6,3	7,9	9,4	11,2	13,2	15,3	17,5
$\frac{N_F}{\lambda}$ B120	4,5	5,3	6,1	8	10,1	12,5	15,1	18	21,1	24,5	28,1
$\frac{N_F}{\lambda}$ B244	5,6	6,6	7,6	10	12,6	15,6	18,9	22,5	26,4	30,6	35,1

4.5.2. Résultats :

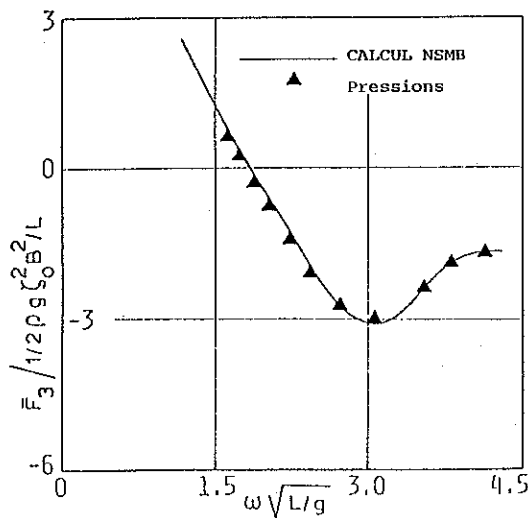


FORCE DE DERIVE LONGITUDINALE
HOULE DE FACE

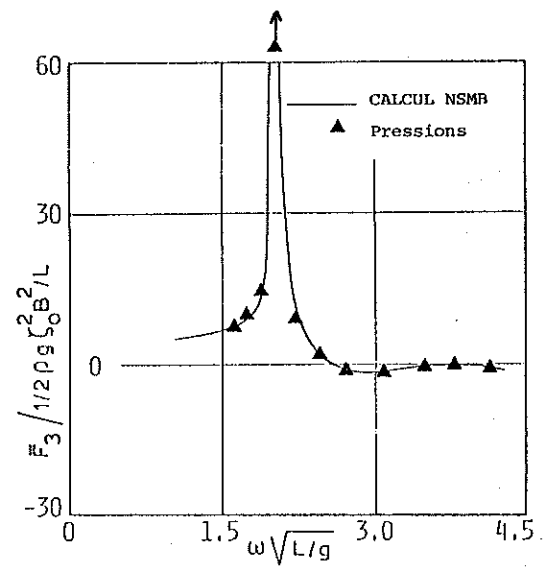


FORCE DE DERIVE TRANSVERSALE
HOULE DE TRAVERS

Figure 4.28



FORCE DE DERIVE VERTICALE
HOULE DE FACE



FORCE DE DERIVE VERTICALE
HOULE DE TRAVERS

Figure 4.29

4.5.3. Analyse des résultats :

A l'examen de ces courbes, on constate un bon accord général entre les résultats obtenus avec une discrétisation de 120 facettes et ceux de Pinkster pour les efforts de dérive verticaux, ainsi que pour l'effort longitudinal houle de face. Dans ce dernier cas, l'écart entre les deux formulations des efforts de dérive est relativement important. Pour la force transversale houle de travers, les résultats sont assez dispersés, l'allure des courbes est conservée, mais l'amplitude des extremums est différente et les résultats expérimentaux ne permettent pas de trancher.

Compte tenu des résultats précédemment obtenus, on peut penser que la discrétisation est trop grossière pour le calcul des efforts horizontaux, particulièrement en houle de travers, la barge n'étant représentée que par une facette sur la hauteur avec moins de 10 facettes par longueur d'onde en-dessous d'une période de houle de 9 s ($\omega \sqrt{L/g} > 2,8$).

On constate effectivement un meilleur accord des deux formulations pour les efforts transversaux avec le découpage le plus fin. Par contre, les forces longitudinales et verticales sont peu modifiées par le raffinement de la discrétisation. La relative stabilité des écarts pour les forces longitudinales montre que la convergence éventuelle ne pourra être atteinte qu'avec un maillage beaucoup plus fin, ce qui risque d'entraîner des temps de calcul prohibitifs.

Les résultats que nous avons obtenus sont globalement en bon accord avec ceux de Pinkster [98] pour la formulation par intégration des pressions et du N.M.I. [104] pour les deux formulations. Les problèmes rencontrés pour obtenir des valeurs convergentes des efforts de dérive montrent la difficulté de la détermination précise des efforts du second ordre sur certaines structures, tant sur le plan numérique qu'expérimental puisque les essais ne permettent pas de définir la meilleure formulation. Les écarts constatés permettent seulement d'avoir une estimation de l'incertitude sur les grandeurs du second ordre.

4.6. VERIFICATION DES PROPRIETES THEORIQUES :

Lors de la formulation du problème théorique, nous avons démontré certaines propriétés telles que les symétries des coefficients hydrodynamiques pour un ensemble de corps, ainsi que l'équivalence des formules d'Haskind avec l'intégration des pressions pour le problème de diffraction. Nous allons nous servir des exemples traités précédemment pour vérifier numériquement ces propriétés.

4.6.1. Symétrie des coefficients hydrodynamiques :

Nous allons utiliser les résultats obtenus pour les deux demi-sphères décrites au paragraphe 4.4. Les coefficients adimensionnels de masse d'eau ajoutée et d'amortissement sont définis par :

$$CM_{ij} = \frac{M_{ij}}{\rho L^3} ; CA_{ij} = \frac{B_{ij}}{\rho L^3 \omega} \text{ pour } i = 1,2,3 ; j = 1,2,3$$

$$CM_{ij} = \frac{M_{ij}}{\rho L^4} ; CA_{ij} = \frac{B_{ij}}{\rho L^4 \omega} \text{ pour } i = 1,2,3 ; j = 4,5,6 \text{ et } i = 4,5,6 ; j = 1,2,3$$

$$CM_{ij} = \frac{M_{ij}}{\rho L^5} ; CA_{ij} = \frac{B_{ij}}{\rho L^5 \omega} \text{ pour } i = 4,5,6 ; j = 4,5,6$$

où L est une longueur de référence, ρ la masse volumique du fluide et ω la pulsation du mouvement.

Pour une période de 1,79 s et une distance entre les centres des corps égale à 3 m, les résultats des coefficients de masse d'eau ajoutée et d'amortissement pour une longueur de référence L = 5 m sont donnés ci-dessous :

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS DE MASSE D'EAU AJOUTÉE DU CORPS 1 QUAND LE CORPS 1 OSCILLE

CM11 = 7.662045E-03	CM12 = -4.773427E-14	CM13 = -3.112114E-14
CM14 = -1.490235E-14	CM15 = -3.125087E-06	CM16 = -2.304614E-03
CM21 = -3.031962E-14	CM22 = 5.951123E-03	CM23 = -1.014908E-03
CM24 = -3.021157E-04	CM25 = 1.008750E-14	CM26 = 8.278812E-15
CM31 = -6.983452E-14	CM32 = -1.011588E-03	CM33 = 6.163201E-03
CM34 = 1.848511E-03	CM35 = -3.010712E-14	CM36 = 2.102065E-14
CM41 = -2.653106E-14	CM42 = -3.011345E-04	CM43 = 1.848509E-03
CM44 = 5.544270E-04	CM45 = -9.026934E-15	CM46 = 7.989535E-15
CM51 = -3.110743E-06	CM52 = 1.009881E-14	CM53 = -2.961305E-14
CM54 = -8.878713E-15	CM55 = 9.555487E-09	CM56 = 9.332229E-07
CM61 = -2.304614E-03	CM62 = 1.353432E-14	CM63 = 9.389536E-15
CM64 = 4.502346E-15	CM65 = 9.375260E-07	CM66 = 6.913841E-04

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS DE MASSE D'EAU AJOUTÉE DU CORPS 1 QUAND LE CORPS 2 OSCILLE

CM11 = -1.424923E-03	CM12 = 6.973639E-15	CM13 = 3.817750E-14
CM14 = -1.225496E-14	CM15 = 6.313465E-07	CM16 = -4.274769E-04
CM21 = -3.031962E-14	CM22 = 2.324168E-03	CM23 = -2.336825E-03
CM24 = 7.020748E-04	CM25 = 1.763471E-14	CM26 = -9.249616E-15
CM31 = 2.638307E-14	CM32 = 2.328155E-03	CM33 = -1.398401E-03
CM34 = 4.205637E-04	CM35 = 7.437149E-15	CM36 = 7.781841E-15
CM41 = 8.740071E-15	CM42 = 6.994746E-04	CM43 = -4.205676E-04
CM44 = 1.264837E-04	CM45 = 2.238645E-15	CM46 = 2.582050E-15
CM51 = 6.303085E-07	CM52 = -1.759743E-14	CM53 = 7.499011E-15
CM54 = -2.257205E-15	CM55 = -2.790339E-10	CM56 = 1.890925E-07
CM61 = 4.274769E-04	CM62 = -2.241475E-15	CM63 = -1.132481E-14
CM64 = 3.640214E-15	CM65 = -1.894040E-07	CM66 = 1.282431E-04

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS D'AMORTISSEMENT DU CORPS 1 QUAND LE CORPS 1 OSCILLE

CA11 = 6.482722E-03	CA12 = -8.233643E-14	CA13 = -2.116231E-14
CA14 = -1.044531E-14	CA15 = -2.886860E-06	CA16 = -1.944817E-03
CA21 = -9.83228E-14	CA22 = 7.483430E-03	CA23 = -2.495213E-05
CA24 = -4.152603E-06	CA25 = 8.803304E-15	CA26 = 2.904410E-14
CA31 = -5.216695E-14	CA32 = -2.528915E-05	CA33 = 3.127743E-03
CA34 = 9.383123E-04	CA35 = -1.604016E-14	CA36 = 1.565725E-14
CA41 = -1.973581E-14	CA42 = -4.253273E-06	CA43 = 9.383123E-04
CA44 = 2.814920E-04	CA45 = -4.806334E-15	CA46 = 5.923269E-15
CA51 = -2.88725E-06	CA52 = 8.762309E-15	CA53 = -1.615016E-14
CA54 = -4.839346E-15	CA55 = 1.285950E-09	CA56 = 8.663176E-07
CA61 = -1.944817E-03	CA62 = 2.426005E-14	CA63 = 6.348521E-15
CA64 = 3.133468E-15	CA65 = 8.660580E-07	CA66 = 5.834450E-04

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS D'AMORTISSEMENT DU CORPS 1 QUAND LE CORPS 2 OSCILLE

CA11 = -2.469400E-04	CA12 = 1.599296E-13	CA13 = -1.016146E-13
CA14 = 2.994526E-14	CA15 = 1.092721E-07	CA16 = -7.408199E-03
CA21 = -1.661930E-13	CA22 = -5.016165E-03	CA23 = 1.658103E-03
CA24 = -4.996667E-04	CA25 = 1.672258E-15	CA26 = -4.955353E-14
CA31 = -7.102551E-14	CA32 = -1.652922E-03	CA33 = 1.678637E-04
CA34 = -5.109302E-05	CA35 = 5.650161E-15	CA36 = -2.120119E-14
CA41 = -2.079268E-14	CA42 = -4.981126E-04	CA43 = 5.109554E-05
CA44 = -1.554983E-05	CA45 = 1.695545E-15	CA46 = -6.205684E-15
CA51 = 1.094578E-07	CA52 = -1.592440E-15	CA53 = 5.673310E-15
CA54 = -1.702441E-15	CA55 = -4.843403E-11	CA56 = 3.283735E-08
CA61 = 7.408199E-05	CA62 = -4.767581E-14	CA63 = 3.038488E-14
CA64 = -8.952636E-15	CA65 = -3.278162E-08	CA66 = 2.222460E-05

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS DE MASSE D'EAU AJOUTÉE DU CORPS 2 QUAND LE CORPS 1 OSCILLE

CM11 = -1.424923E-03	CM12 = -6.973639E-15	CM13 = 3.817750E-14
CM14 = 1.225496E-14	CM15 = 6.313465E-07	CM16 = 4.274769E-04
CM21 = 3.031962E-14	CM22 = 2.324168E-03	CM23 = 2.336825E-03
CM24 = 7.020748E-04	CM25 = -1.763471E-14	CM26 = -9.249616E-15
CM31 = 2.638307E-14	CM32 = -2.328155E-03	CM33 = -1.398401E-03
CM34 = -4.205637E-04	CM35 = 7.437149E-15	CM36 = -7.781841E-15
CM41 = -8.740071E-15	CM42 = 6.994746E-04	CM43 = 4.205676E-04
CM44 = 1.264837E-04	CM45 = -2.238645E-15	CM46 = 2.582050E-15
CM51 = 6.303085E-07	CM52 = 1.759743E-14	CM53 = 7.499011E-15
CM54 = 2.257205E-15	CM55 = -2.790339E-10	CM56 = -1.890925E-07
CM61 = -4.274769E-04	CM62 = -2.241475E-15	CM63 = 1.132481E-14
CM64 = 3.640214E-15	CM65 = 1.894040E-07	CM66 = 1.282431E-04

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS DE MASSE D'EAU AJOUTÉE DU CORPS 2 QUAND LE CORPS 2 OSCILLE

CM11 = 7.682045E-03	CM12 = 4.773427E-14	CM13 = -3.112114E-14
CM14 = 1.490235E-14	CM15 = -3.125087E-06	CM16 = 2.304614E-03
CM21 = 3.031962E-14	CM22 = 5.951123E-03	CM23 = 1.014908E-03
CM24 = -3.021157E-04	CM25 = 1.008750E-14	CM26 = 8.278812E-15
CM31 = 2.638307E-14	CM32 = 2.328155E-03	CM33 = 6.163201E-03
CM34 = -4.205637E-04	CM35 = 7.437149E-15	CM36 = -2.102065E-14
CM41 = -8.740071E-15	CM42 = -3.011345E-04	CM43 = 1.848509E-03
CM44 = 1.264837E-04	CM45 = 9.026934E-15	CM46 = 7.989535E-15
CM51 = 6.303085E-07	CM52 = -1.009881E-14	CM53 = -2.961305E-14
CM54 = 2.257205E-15	CM55 = 9.555487E-09	CM56 = 9.332229E-07
CM61 = 4.274769E-04	CM62 = 1.353432E-14	CM63 = -9.389536E-15
CM64 = 3.640214E-15	CM65 = 9.375260E-07	CM66 = 6.913841E-04

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS D'AMORTISSEMENT DU CORPS 2 QUAND LE CORPS 1 OSCILLE

CA11 = -2.469400E-04	CA12 = -1.599296E-13	CA13 = -1.016146E-13
CA14 = -2.994526E-14	CA15 = 1.092721E-07	CA16 = -7.408199E-03
CA21 = 1.661930E-13	CA22 = -5.016165E-03	CA23 = 1.658103E-03
CA24 = -4.996667E-04	CA25 = -1.672258E-15	CA26 = -4.955353E-14
CA31 = -7.102551E-14	CA32 = 1.652922E-03	CA33 = 1.678637E-04
CA34 = 5.109302E-05	CA35 = 5.650161E-15	CA36 = -2.120119E-14
CA41 = 2.079268E-14	CA42 = -4.981126E-04	CA43 = 5.109554E-05
CA44 = -1.554983E-05	CA45 = -1.695545E-15	CA46 = -6.205684E-15
CA51 = 1.094578E-07	CA52 = -1.592440E-15	CA53 = 5.673310E-15
CA54 = -1.702441E-15	CA55 = -4.843403E-11	CA56 = 3.283735E-08
CA61 = 7.408199E-05	CA62 = -4.767581E-14	CA63 = -3.038488E-14
CA64 = -8.952636E-15	CA65 = 3.278162E-08	CA66 = 2.222460E-05

COEFFICIENTS ADIMENSIONNELS D'AMORTISSEMENT DU CORPS 2 QUAND LE CORPS 2 OSCILLE

CA11 = 6.482722E-03	CA12 = 8.233643E-14	CA13 = -2.116231E-14
CA14 = 1.044531E-14	CA15 = -2.886860E-06	CA16 = 1.944817E-03
CA21 = 9.83228E-14	CA22 = 7.483430E-03	CA23 = 2.495213E-05
CA24 = -4.152603E-06	CA25 = -8.803304E-15	CA26 = 2.904410E-14
CA31 = -5.216695E-14	CA32 = 2.528915E-05	CA33 = 3.127743E-03
CA34 = 9.383123E-04	CA35 = -1.604016E-14	CA36 = 1.565725E-14
CA41 = 1.973581E-14	CA42 = -4.253273E-06	CA43 = -9.383123E-04
CA44 = 2.814920E-04	CA45 = -4.806334E-15	CA46 = 5.923269E-15
CA51 = 1.094578E-07	CA52 = -8.762309E-15	CA53 = -1.615016E-14
CA54 = -4.839346E-15	CA55 = 1.285950E-09	CA56 = 8.663176E-07
CA61 = 1.944817E-03	CA62 = 2.426005E-14	CA63 = -6.348521E-15
CA64 = 3.133468E-15	CA65 = -8.660580E-07	CA66 = 5.834450E-04

Les propriétés de symétrie définies par :

$$B_{ij}^{pq} = B_{ji}^{qp} , B_{ii}^{pp} \geq 0 , M_{ij}^{pq} = M_{ji}^{qp}$$

où p et q sont les indices des coefficients adimensionnels, i est le corps qui oscille et j le corps influencé, sont vérifiées à 5. 10⁻⁶ près. En particulier, avec cette tolérance, on a :