

$$M_{11}^{24} = M_{11}^{42}, B_{11}^{24} = B_{11}^{42}, M_{21}^{24} = M_{12}^{42}, B_{21}^{24} = B_{12}^{42}, M_{12}^{23} = M_{21}^{32},$$

$$B_{12}^{23} = B_{21}^{32}, B_{11}^{PP} = B_{22}^{PP} = 0.$$

Les propriétés générales de symétrie et de positivité sont donc bien vérifiées. Dans le cas présent, la configuration particulière du système fait qu'il existe d'autres relations entre les coefficients. On doit cependant remarquer que $B_{12}^{11} = B_{21}^{11} < 0$, ce qui confirme que les coefficients d'amortissement diagonaux ne sont a priori positifs que s'il s'agit de l'influence du mouvement du corps sur lui-même.

4.6.2 Comparaison des formulations des efforts de diffraction :

Nous allons comparer les efforts de diffraction obtenus par application des formules d'Haskind à partir de la solution des problèmes de radiation à ceux issus d'un calcul direct. La comparaison sera réalisée pour la barge N.S.M.B. décrite en 4.5, discrétisée en 68 facettes pour des périodes de 6, 10 et 15 s et un angle de houle de 135 ° et discrétisée en 244 facettes pour une période de 10 s et des angles de houle de 180 °, 135 ° et 90 °. Les résultats sont indiqués ci-dessous :

- Barge 68 facettes :

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
 PERIODE = 6.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		-6.959889E+05	2.374096E+06	2.474011E+06	163.66
2		1.899790E+06	-7.823390E+05	2.054570E+06	292.38
3		-1.459703E+04	-1.127145E+06	1.127239E+06	0.74
4		2.997038E+07	1.306253E+06	2.999883E+07	267.50
5		-1.585160E+06	1.085748E+08	1.085864E+08	179.16
6		-7.045762E+07	-2.287491E+08	2.393542E+08	17.12

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
 PERIODE = 6.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		-8.710600E+05	2.420373E+06	2.572344E+06	160.21
2		1.973004E+06	-5.037782E+05	2.036305E+06	284.32
3		3.085422E+06	-1.862378E+06	3.603926E+06	301.12
4		3.253123E+07	3.817872E+06	3.275449E+07	263.31
5		-1.489533E+06	8.352004E+07	8.353332E+07	178.98
6		-5.314881E+07	-2.333369E+08	2.393134E+08	12.83

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
PERIODE = 10.00000 SECONDES
XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN NAM
DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
EFFORTS : F(T)=AMPCOS*COS(W*T)+AMPSIN*SIN(W*T)
F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		4.666197E+06	-3.453643E+06	5.805260E+06	306.51
2		-8.172774E+06	-2.187338E+06	8.460419E+06	75.02
3		-1.113029E+07	-2.746040E+06	1.146404E+07	76.14
4		1.724687E+07	0.654364E+06	1.929644E+07	243.35
5		5.295546E+08	-5.753146E+08	7.819302E+08	317.37
6		-1.052741E+08	6.926754E+08	7.006296E+08	171.36

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
PERIODE = 10.00000 SECONDES
XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN NAM
DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
EFFORTS : F(T)=AMPCOS*COS(W*T)+AMPSIN*SIN(W*T)
F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		4.661289E+06	-3.530297E+06	5.847274E+06	307.14
2		-8.251249E+06	-2.141700E+06	8.524669E+06	75.45
3		-1.112472E+07	-2.406535E+06	1.138204E+07	77.79
4		1.763916E+07	7.538999E+06	1.918272E+07	246.86
5		5.151042E+08	-5.725148E+08	7.701335E+08	318.02
6		-1.017039E+08	6.948572E+08	7.022607E+08	171.67

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
PERIODE = 15.00000 SECONDES
XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN NAM
DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
EFFORTS : F(T)=AMPCOS*COS(W*T)+AMPSIN*SIN(W*T)
F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		7.241044E+06	-1.111037E+06	7.325785E+06	278.72
2		-1.303265E+07	-1.764034E+06	1.315150E+07	82.29
3		-1.814646E+07	-3.077699E+07	3.572838E+07	30.52
4		9.127016E+07	1.303803E+07	9.219670E+07	261.87
5		1.039513E+09	-1.737177E+08	1.053928E+09	279.49
6		-1.011336E+07	3.501254E+08	3.502715E+08	178.35

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
PERIODE = 15.00000 SECONDES
XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN NAM
DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
EFFORTS : F(T)=AMPCOS*COS(W*T)+AMPSIN*SIN(W*T)
F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		7.231248E+06	-1.124019E+06	7.318085E+06	278.84
2		-1.302669E+07	-1.743162E+06	1.314280E+07	82.38
3		-1.811390E+07	-3.066233E+07	3.561308E+07	30.57
4		9.020953E+07	1.173995E+07	9.097025E+07	262.59
5		1.037608E+09	-1.738451E+08	1.052071E+09	279.51
6		-1.001134E+07	3.498544E+08	3.499976E+08	178.36

- Barge 244 facettes :

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 180.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*M
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		-2.452121E+06	-3.281841E+06	4.096752E+06	36.77
2		1.308752E-01	-2.905308E-01	3.186479E-01	335.75
3		-2.023330E+06	3.908477E+06	4.401143E+06	152.63
4		-1.999482E+00	2.908338E+00	3.529357E+00	145.49
5		3.384738E+08	-4.716860E+08	5.805620E+08	324.34
6		-1.926774E+01	1.710012E+02	1.720833E+02	173.57

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 180.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*M
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		-2.399844E+06	-3.273295E+06	4.058782E+06	36.25
2		3.102227E-01	-1.938892E-01	3.658294E-01	302.01
3		-2.061247E+06	3.987696E+06	4.488926E+06	152.67
4		7.270845E-01	-4.362507E+00	4.422682E+00	350.54
5		3.347949E+08	-4.710132E+08	5.778764E+08	324.59
6		0.000000E+00	1.047002E+02	1.047002E+02	180.00

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*M
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		4.677792E+06	-3.499686E+06	5.842049E+06	306.80
2		-8.065900E+06	-2.034703E+06	8.318579E+06	75.84
3		-1.139737E+07	-3.128126E+06	1.181885E+07	74.65
4		2.843960E+07	1.021014E+07	3.021685E+07	250.25
5		5.369658E+08	-5.926386E+08	7.997204E+08	317.82
6		-9.578191E+07	6.860740E+08	6.927277E+08	172.05

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 135.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*M
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMP*cos*cos(W*T)+AMP*sin*sin(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*sin(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*sin(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		4.732857E+06	-3.486186E+06	5.878216E+06	306.38
2		-8.058672E+06	-1.987254E+06	8.300083E+06	76.15
3		-1.142569E+07	-2.981503E+06	1.180829E+07	75.37
4		2.870682E+07	9.687447E+06	3.029733E+07	251.35
5		5.312697E+08	-5.910224E+08	7.947044E+08	318.05
6		-9.352904E+07	6.851917E+08	6.915457E+08	172.23

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 90.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMPCOS*ACOS(W*T)+AMPSIN*ASIN(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	THEOREME D'HASKIND			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		-1.582621E+00	1.342683E+00	2.075448E+00	130.31
2		-2.495190E+07	-2.944641E+06	2.512505E+07	83.27
3		-2.613545E+07	-1.750615E+07	3.145675E+07	56.18
4		1.540830E+08	1.610261E+07	1.549221E+08	264.03
5		2.850171E+02	4.638799E+02	5.444440E+02	211.57
6		-6.507406E+01	-1.369645E+02	1.516375E+02	25.41

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX BETA = 90.00000 DEGRES
 PERIODE = 10.00000 SECONDES
 XEFF = 0.00000 YEFF = 0.00000 ZEFF = 0.00000

AMPLITUDE DES FORCES 1,2,3 (RESPECTIVEMENT FX,FY,FZ) EN N
 AMPLITUDE DES MOMENTS 4,5,6 (MOMENTS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN N*
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 EFFORTS : F(T)=AMPCOS*ACOS(W*T)+AMPSIN*ASIN(W*T)
 F(T)=-MODULE(F)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

CORPS	1	INTEGRATION DES PRESSIONS			
EFFORT		AMPLITUDE COSINUS	AMPLITUDE SINUS	MODULE	PHASE
1		1.754697E+00	-1.570503E+00	2.354876E+00	311.83
2		-2.497508E+07	-2.876513E+06	2.514019E+07	83.43
3		-2.617777E+07	-1.720319E+07	3.132451E+07	56.69
4		1.543203E+08	1.515253E+07	1.550624E+08	264.39
5		7.852513E+01	3.315505E+02	3.407227E+02	193.32
6		-7.441255E+01	-1.940861E+02	2.078621E+02	20.98

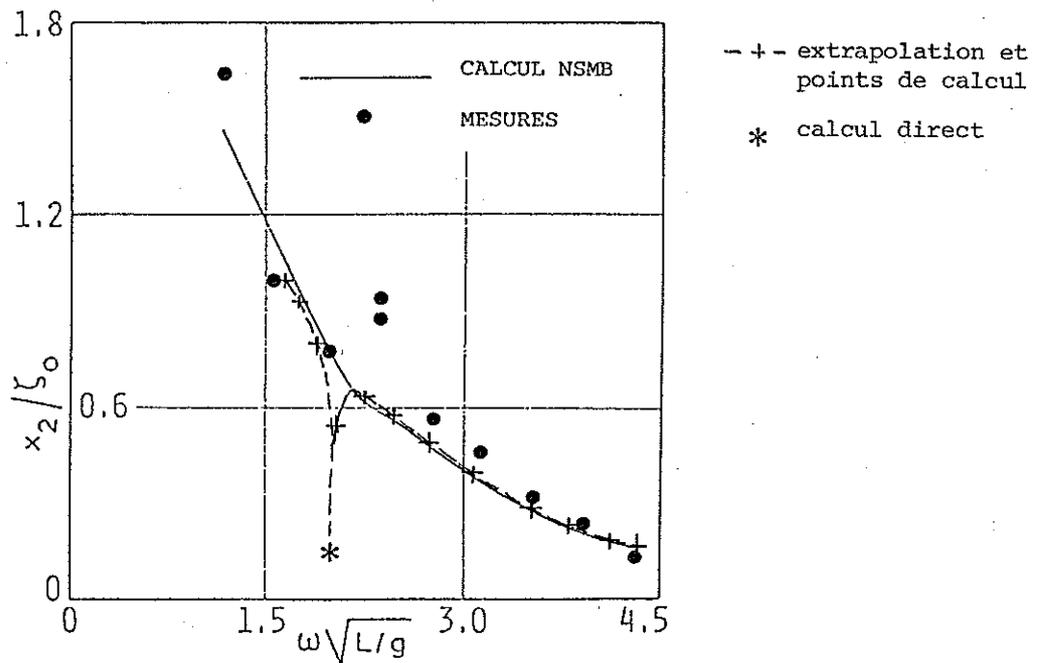
Pour la discrétisation en 68 facettes à 6 s, on remarque un écart important pour les efforts verticaux qui correspond certainement à une discrétisation trop grossière pour la période. A 10 s et à 15 s, l'écart entre les résultats des deux formulations est inférieur à 2 %. Il en est de même pour la discrétisation la plus fine où les écarts sur les valeurs significatives (non numériquement nulles) sont inférieurs à 1 %. On peut d'ailleurs constater que pour une période de 10 s et un angle de houle de 135 °, les efforts de diffraction pour les deux discrétisations sont voisins, sauf pour le moment de tangage pour lequel une discrétisation en 68 facettes semble insuffisante.

L'accord entre les deux formulations est en général satisfaisant. Compte tenu des temps de calcul, qui sont négligeables lorsqu'on applique les formules d'Haskind, il est intéressant de comparer systématiquement les résultats des deux formulations, un désaccord éventuel permettant de remettre en cause le maillage du corps pour la détermination du ou des efforts litigieux.

4.7. ETUDE LOCALE DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE :

Lors de la résolution du problème mécanique, on peut être confronté au problème de la localisation des comportements singuliers des mouvements, tels que les résonances ou les extinctions. Il est possible de résoudre ces problèmes avec la méthode utilisée précédemment en multipliant le nombre de résolutions de problèmes hydrodynamiques et mécaniques pour les différentes fréquences. Cette méthode est rigoureuse, mais très couteuse en temps de calcul, alors que les singularités de comportement sont souvent dues, non à des variations brusques des solutions du problème hydrodynamique, mais à la résolution des équations de la mécanique. Il est alors possible d'effectuer un premier dégrossissage du comportement en approchant les solutions des problèmes hydrodynamiques de radiation et de diffraction entre deux points de calcul à l'aide de polynômes d'interpolation et en résolvant les équations de la mécanique avec les valeurs interpolées. Les résonances mécaniques peuvent être localisées avec une bonne précision sans augmentation notable des temps de calcul, puisqu'il s'agit seulement d'effectuer un balayage complémentaire pour les équations du mouvement une fois tous les calculs hydrodynamiques effectués.

Nous allons appliquer cette méthode dans le cas du mouvement d'embarquée de la barge N.S.M.B. discrétisée en 68 facettes. Sur la figure 4.30, nous avons reporté les points de résolution des problèmes hydrodynamiques initiaux avec des croix, et en pointillés la courbe obtenue en interpolant les solutions des problèmes hydrodynamiques entre 6 s et 15 s à l'aide de paraboles s'appuyant sur ces points. On constate, malgré la discrétisation grossière, un bon accord des résultats avec l'expérience et avec les calculs effectués par Pinskster au N.S.M.B. avec une discrétisation en 120 facettes. Cependant, à une période de 12,1 s, l'interpolation des résultats montre une extinction du mouvement d'embarquée qui ne pouvait être décelée avec le balayage initial. Une résolution directe du problème hydrodynamique pour cette période confirme ce point.



AMPLITUDE DU MOUVEMENT D'EMBARDEE
HOULE DE TRAVERS

Figure 4.30

Les résultats des interpolations entre 10,5 s et 13,5 s avec un pas de 0,05 s sont donnés sous forme de tableau, Y est le mouvement d'embarquée, Z le pilonnement et TX le tangage en degrés. Les valeurs soulignées sont celles qui sont issues d'un calcul direct.

AMPLITUDE DES MOUVEMENTS 1,2,3 (RESPECTIVEMENT X,Y,Z) EN M
 AMPLITUDE DES MOUVEMENTS 4,5,6 (ROTATIONS AUTOUR DE OX,OY,OZ) EN DEGRES
 DANS UN LIQUIDE DE MASSE VOLUMIQUE 1000. KG/M**3
 POUR UNE HOULE D'AMPLITUDE A = 1 M
 MOUVEMENTS : X(T)=AMPCOSACOS(W*T)+AMPSIN*ASIN(W*T)
 X(T)=-MODULE(X)*SIN(W*T+PHI) , 0<PHI<360
 HOULE AU POINT XEFF,YEFF,0. : H(T)=-A*SIN(W*T)

ANGLE DE LA HOULE AVEC L'AXE OX = 90.000 DEGRES

T	Y	Z	TX	PY	PZ	PTX	
10.50	0.6155	1.331	2.104	286.6	326.4	103.2	
10.55	0.6189	1.334	2.193	286.5	327.6	103.2	
10.60	0.6223	1.337	2.288	286.5	329.7	103.2	
10.65	0.6256	1.339	2.388	286.5	329.8	103.2	
10.70	0.6289	1.340	2.496	286.6	330.8	103.2	
10.75	0.6320	1.340	2.610	286.6	331.9	103.3	
10.80	0.6350	1.340	2.733	286.7	332.8	103.4	
10.85	0.6380	1.339	2.866	286.8	333.8	103.5	
10.90	0.6408	1.338	3.008	286.9	334.7	103.6	
10.95	0.6434	1.336	3.162	287.1	335.6	103.7	
<u>11.00</u>	<u>0.6459</u>	<u>1.334</u>	<u>3.329</u>	<u>287.3</u>	<u>336.4</u>	<u>103.9</u>	
11.05	0.6483	1.332	3.510	287.4	337.2	104.1	
11.10	0.6505	1.329	3.708	287.7	337.9	104.3	
11.15	0.6524	1.327	3.924	288.0	338.7	104.5	
11.20	0.6541	1.323	4.163	288.3	339.4	104.8	
11.25	0.6554	1.320	4.427	288.7	340.1	105.1	
11.30	0.6563	1.317	4.721	289.1	340.7	105.5	
11.35	0.6567	1.313	5.050	289.7	341.3	105.9	
11.40	0.6565	1.309	5.420	290.3	341.9	106.4	
11.45	0.6556	1.305	5.841	291.0	342.5	107.0	
11.50	0.6539	1.301	6.322	291.9	343.1	107.7	
11.55	0.6510	1.297	6.878	292.9	343.6	108.6	
11.60	0.6467	1.293	7.526	294.2	344.1	109.6	
11.65	0.6405	1.289	8.291	295.7	344.6	111.8	
11.70	0.6317	1.285	9.207	297.5	345.1	112.3	
11.75	0.6194	1.281	10.32	299.9	345.6	114.1	
11.80	0.6019	1.277	11.70	302.9	346.0	116.4	
11.85	0.5770	1.273	13.43	306.9	346.5	119.4	
11.90	0.5403	1.269	15.65	312.3	346.9	123.4	
11.95	0.4851	1.265	18.56	320.2	347.3	128.8	
<u>12.00</u>	<u>0.3998</u>	<u>1.261</u>	<u>22.35</u>	<u>332.6</u>	<u>347.7</u>	<u>136.6</u>	
12.05	0.2708	1.257	27.08	356.0	348.0	147.7	
<u>0.1453</u>	<u>12.10</u>	0.1459	1.253	31.98	68.0	348.4	163.6
12.15	0.3122	1.249	34.63	154.9	348.7	183.8	
12.20	0.5511	1.245	32.92	189.8	349.0	204.3	
12.25	0.7066	1.241	28.46	211.5	349.3	220.8	
12.30	0.7863	1.237	23.83	225.8	349.7	232.5	
12.35	0.8249	1.233	20.03	235.4	349.9	240.5	
12.40	0.8439	1.230	17.09	242.1	350.2	246.2	
12.45	0.8539	1.226	14.83	247.0	350.5	250.3	
12.50	0.8596	1.223	13.08	250.6	350.8	253.4	
12.55	0.8632	1.219	11.68	253.4	351.0	255.8	
12.60	0.8659	1.216	10.55	255.7	351.3	257.7	
12.65	0.8681	1.212	9.624	257.5	351.5	259.3	
12.70	0.8701	1.209	8.849	258.9	351.7	260.5	
12.75	0.8721	1.206	8.194	260.2	351.9	261.6	
12.80	0.8742	1.202	7.632	261.2	352.2	262.5	
12.85	0.8764	1.199	7.146	262.1	352.4	263.2	
12.90	0.8786	1.196	6.722	262.9	352.6	263.9	
12.95	0.8810	1.193	6.348	263.5	352.8	264.5	
<u>13.00</u>	<u>0.8834</u>	<u>1.190</u>	<u>6.016</u>	<u>264.1</u>	<u>352.9</u>	<u>265.0</u>	
13.05	0.8860	1.187	5.720	264.6	353.1	265.4	
13.10	0.8887	1.184	5.454	265.1	353.3	265.8	
13.15	0.8915	1.181	5.214	265.5	353.5	266.2	
13.20	0.8943	1.179	4.996	265.9	353.6	266.5	
13.25	0.8972	1.176	4.797	266.2	353.8	266.7	
13.30	0.9002	1.173	4.615	266.5	353.9	267.0	
13.35	0.9033	1.171	4.448	266.8	354.1	267.2	
13.40	0.9063	1.168	4.294	267.0	354.2	267.4	
13.45	0.9095	1.166	4.151	267.2	354.4	267.6	
13.50	0.9127	1.163	4.019	267.4	354.5	267.8	

Sans se prononcer sur la réalité physique dans ce cas du phénomène d'extinction, puisqu'il s'agit d'un couplage entre l'embarquée et la résonance en roulis, l'interpolation des coefficients permet d'attirer l'attention sur les singularités du comportement des solutions. En cas de doute, un calcul direct est toujours possible.

Les limites de cette approche sont évidentes. En effet, on doit avoir au préalable résolu les problèmes hydrodynamiques avec suffisamment de points pour que les coefficients puissent être approchés par les polynômes d'interpolation. En particulier, les coefficients ne doivent pas être extrapolés au-delà des périodes de calcul, et l'utilisation des formulations asymptotiques doit être évitée si l'on ne connaît pas les comportements asymptotiques des coefficients hydrodynamiques et des forces d'excitation. Par ailleurs, les résonances hydrodynamiques dues par exemple à des interactions entre corps ou à des corps non simplement connexes risquent de ne pas être prises en compte.

Néanmoins, pour des corps usuels simplement connexes, cette méthode permet d'obtenir rapidement des informations supplémentaires sur les mouvements. Il est donc intéressant de l'employer systématiquement pour effectuer un balayage en période après résolution de l'ensemble des problèmes hydrodynamiques.

4.8. LE PROBLEME DES FREQUENCES IRRÉGULIERES :

Jusqu'ici, nous n'avons pas constaté de comportement singulier lors de la résolution des problèmes hydrodynamiques, sauf peut-être pour le caisson D.N.V. à une période de 9 s. Néanmoins, le phénomène de fréquences irrégulières existe ; il est donc important de les localiser et d'étudier le comportement numérique des solutions dans leur voisinage.

Les fréquences irrégulières sont les solutions du problème intérieur adjoint défini par :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ E\phi|_{z=0} = 0 \\ \phi|_{\Sigma} = 0 \end{cases}$$

Pour étudier ce phénomène, nous allons tout d'abord chercher des solutions théoriques de ce problème dans des cas particuliers, puis nous examinerons le comportement des solutions numériques autour de ces fréquences, et enfin nous étudierons des méthodes d'élimination de ces fréquences dans le cas de la distribution mixte de Green et de la distribution de sources.

4.8.1. Solutions théoriques du problème :

Dans certains cas particuliers, des solutions théoriques de ce problème peuvent être obtenues analytiquement par une méthode de séparation des variables.

Considérons un caisson parallélépipédique de longueur L, de largeur B et de profondeur H.

Le problème des fréquences irrégulières revient à chercher un potentiel non nul solution de :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \phi = 0 \\ -k_0 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g}$$

Par la méthode de séparation des variables, on obtient [49].

$$(4.3) \quad \phi = \sin px \sin qy \operatorname{sh} k(z+H)$$

avec $p = \frac{n\pi}{L}$, $q = \frac{m\pi}{B}$, $k = \frac{\pi}{L} \sqrt{m^2 \frac{L^2}{B^2} + n^2}$

La condition de surface libre donnant :

$$k_0 = \frac{k}{\operatorname{th} kH} = \frac{\omega^2}{g}$$

ce qui permet d'obtenir les pulsations correspondant aux fréquences irrégulières.

Les périodes correspondantes sont définies par :

$$(4.4) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi H}{L} \sqrt{m^2 \frac{L^2}{B^2} + n^2} \right)}{g \frac{\pi}{L} \sqrt{m^2 \frac{L^2}{B^2} + n^2}}}$$

m et n étant des entiers positifs quelconques.

La première fréquence irrégulière s'obtient pour m=n=1. La période correspondante est :

$$(4.5) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi H}{L} \sqrt{\frac{L^2}{B^2} + 1} \right)}{g \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{L^2}{B^2} + 1}}}$$

Toutes les autres périodes, obtenues pour des valeurs de m et n quelconques, sont inférieures à T₁.

Pour avoir une estimation des valeurs de ces périodes, il faut considérer des cas pratiques.

Par exemple :

Pour le caisson D.N.V. :

$$L = 90 \text{ m}, \quad B = 90 \text{ m}, \quad H = 40 \text{ m} \quad T_1 = 8,857 \text{ s}$$

Pour la barge N.S.M.B.:

$$L = 150 \text{ m}, \quad B = 50 \text{ m}, \quad H = 10 \text{ m} \quad T_1 = 5,936 \text{ s}$$

Pour un navire de commerce :

$$L = 150 \text{ m}, \quad B = 20 \text{ m}, \quad H = 6 \text{ m} \quad T_1 = 4,335 \text{ s}$$

Pour un chalutier :

$$L = 20 \text{ m}, \quad B = 6 \text{ m}, \quad H = 3 \text{ m} \quad T_1 = 2,613 \text{ s}$$

Sauf pour le caisson D.N.V., il s'agit de l'approximation correspondant au parallélépipède exinscrit au corps.

Dans tous les cas, ces périodes se situent à la limite inférieure du domaine pratique d'étude.

Pour des structures d'exploitation pétrolière, les surfaces de flottaison sont en général petites et les périodes T_1 correspondantes sont très faibles.

4.8.2. Mise en évidence numérique pour une distribution mixte de Green :

Lors de la résolution du problème hydrodynamique pour le caisson D.N.V. à l'aide de la distribution mixte de Green, nous avons rencontré une anomalie de comportement autour de 9 s pour les discrétisations les plus grossières. La première fréquence irrégulière se trouvant théoriquement à $T_1 = 8,857 \text{ s}$, nous allons resserrer le pas de calcul autour de cette période. La figure 4.31 montre la variation du coefficient d'amortissement en pilonnement :

$$CA_{33} = \frac{B_{33}}{\rho L^3 \omega}$$

en fonction de la période pour $T = 8,7 ; 8,8 ; 8,857 ; 8,9 ; 9 ; 10 \text{ s}$ pour les différents maillages.

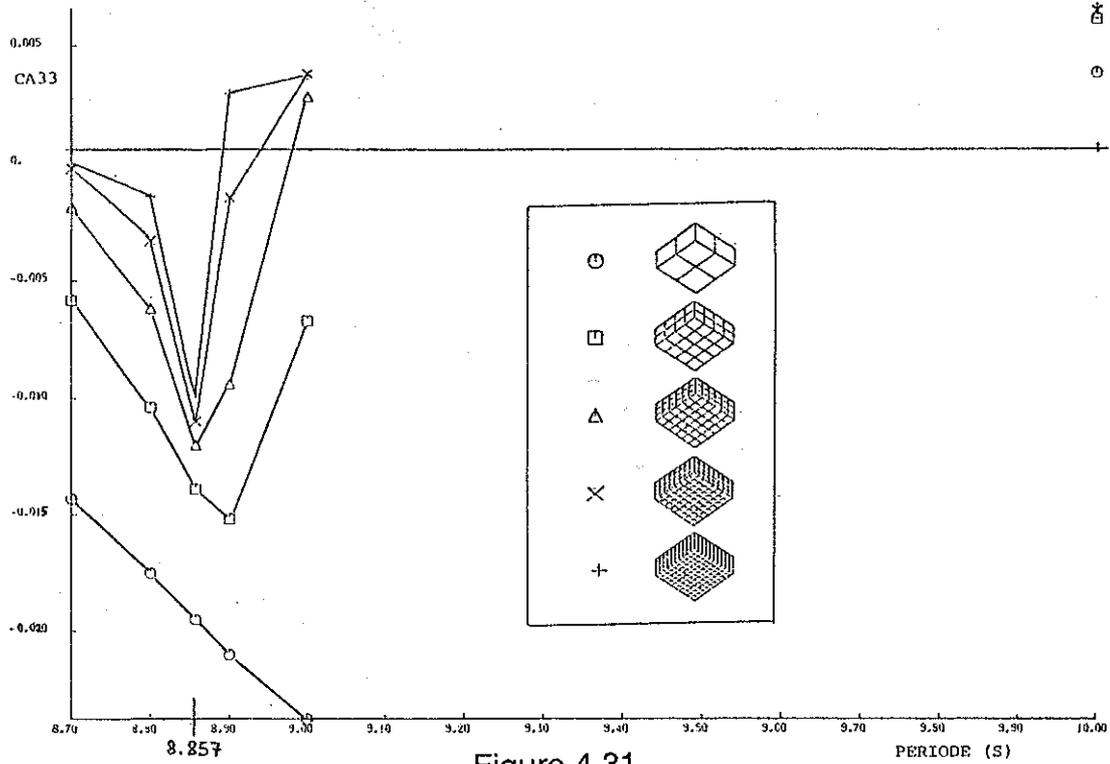


Figure 4.31

On constate que pour le maillage le plus grossier, CA_{33} décroît constamment entre 8,7 et 9 s. Pour les autres maillages, CA_{33} passe par un minimum qui diminue en valeur absolue, tout en se localisant autour de $T_1 = 8,857$ s lorsqu'on augmente la discrétisation. Ce comportement n'est pas aussi typique que dans le cas bidimensionnel, l'amplitude du minimum restant faible. Pour obtenir des renseignements complémentaires, nous avons résolu le système linéaire par la méthode de décomposition en valeurs singulières qui permet de localiser très précisément les fréquences irrégulières du problème bidimensionnel [16].

Sur la figure 4.32, nous avons tracé le facteur de conditionnement du système en fonction de la période et de la discrétisation.

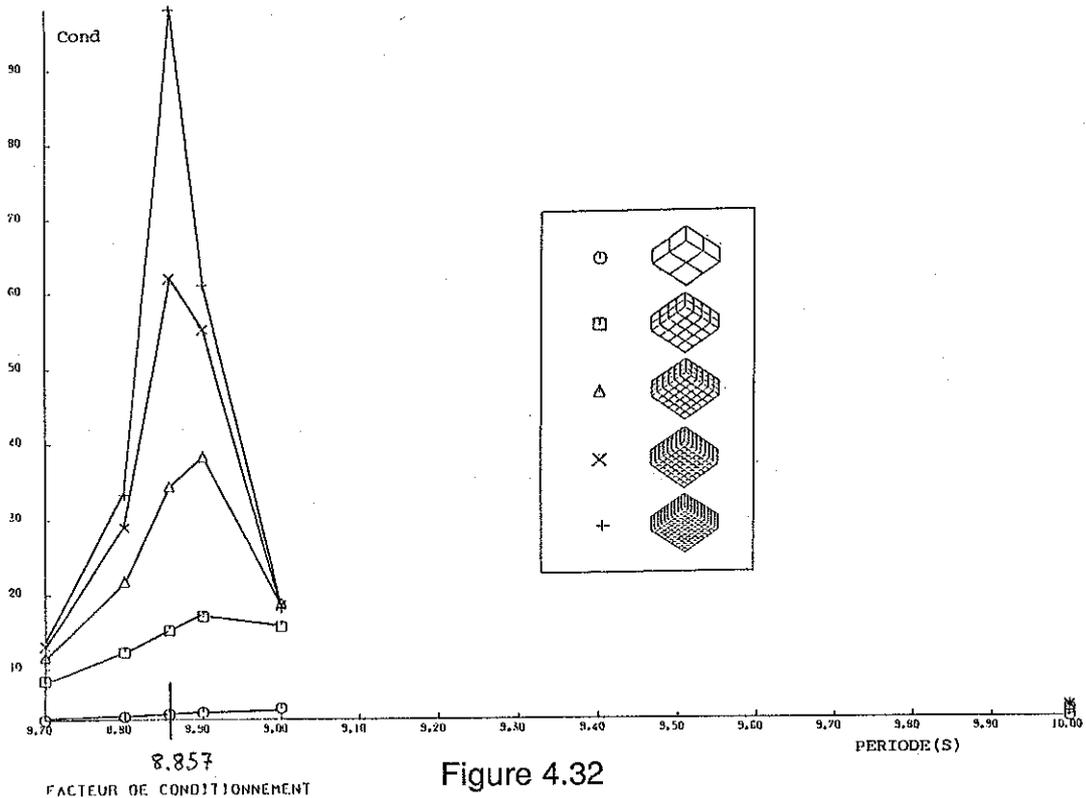


Figure 4.32

On remarque que le facteur de conditionnement augmente avec la finesse du maillage, ce qui constitue une caractéristique des fréquences irrégulières, puisque l'on tend alors vers la solution théorique pour laquelle le déterminant est nul. Le facteur de conditionnement maximum reste cependant petit par rapport à celui rencontré pour les fréquences irrégulières du problème bidimensionnel (100 au lieu de 900) [16].

Le comportement des coefficients hydrodynamiques aux fréquences irrégulières se caractérise par des variations brutales qui deviennent de plus en plus localisées lorsqu'on augmente la discrétisation, le facteur de conditionnement traduisant ce phénomène en l'amplifiant.

4.8.3. Elimination des fréquences irrégulières pour une distribution mixte de Green :

Pour éliminer les fréquences irrégulières dans le cas de la résolution du problème de diffraction-radiation par une distribution mixte de Green, nous allons utiliser le principe qui consiste à afficher $\phi=0$ en des points de contrôle situés dans le domaine intérieur, les équations supplémentaires conduisant à un système rectangulaire qui sera résolu au sens des moindres carrés par la méthode de Householder.

Le seule difficulté consiste dans le choix du nombre et de la position des points de contrôle supplémentaires. Ceux-ci doivent être en assez grand nombre et localisés de telle façon qu'ils puissent influencer sur la solution aux fréquences irrégulières sans perturber la résolution du système en dehors de celles-ci.

Le nombre de points de contrôle a été choisi égal au nombre de facettes possédant un côté appartenant à la ligne de flottaison. Après essais numériques, les points de contrôle ont été disposés sur la normale intérieure au centre de gravité de la facette, à une distance égale à la moitié de la cote du centre de gravité.

Les systèmes linéaires à résoudre pour les discrétisations précédentes du caisson D.N.V. sont maintenant des systèmes à M lignes et N colonnes dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

Nombre de facettes sur la demi-carène	Nombre de lignes M du système	Nombre de colonnes N du système	M/N
6	10	6	1,67
24	32	24	1,33
54	66	54	1,22
96	112	96	1,17
150	170	150	1,13

Ces systèmes rectangulaires, complexes ont été résolu au sens des moindres carrés par la méthode de Householder. Les résultats obtenus pour le coefficient CA_{33} sont représentés sur la figure 4.33, les courbes en pointillés rappelant les résultats obtenus précédemment.

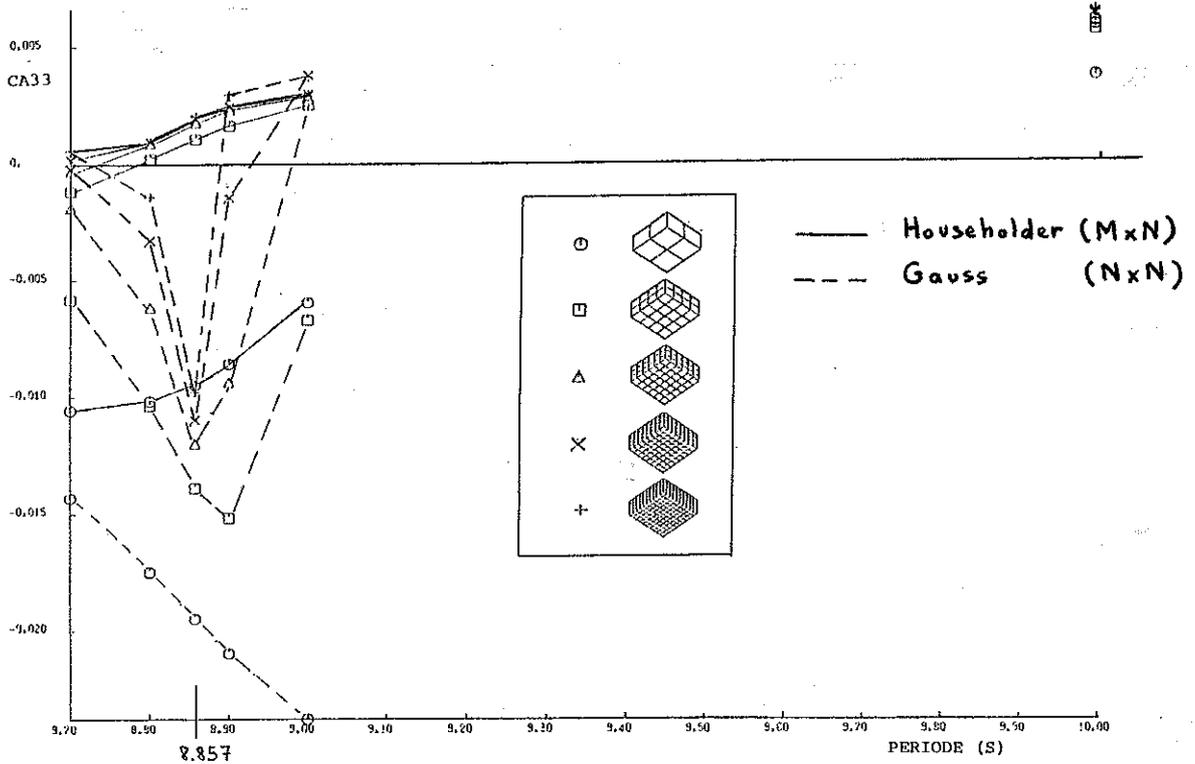


Figure 4.33

A l'examen des résultats, on constate que les courbes sont régulières entre 8,8 et 9 s, les valeurs négatives qui subsistent correspondent aux maillages les plus grossiers pour lesquels le coefficient CA_{33} est éloigné de sa valeur limite.

Les résultats à 10 s sont pratiquement identiques à ceux obtenus précédemment, ce qui montre que la méthode employée ne perturbe pas les solutions en dehors des fréquences irrégulières.

Le nombre de coefficients d'influence à calculer est $M \times N$, ce qui augmente les temps de calcul, d'autant plus que la méthode de Householder en complexe est beaucoup plus longue que la méthode de Gauss. Aussi, nous n'utiliserons cette méthode d'élimination que dans les gammes de périodes pouvant contenir des fréquences irrégulières et non justifiables des formulations asymptotiques lorsque la période tend vers zéro.

On peut d'ailleurs remarquer que pour les formulations asymptotiques, il n'existe pas de fréquences irrégulières car les conditions de surface libre asymptotiques $\phi = 0$ ou $\partial\phi/\partial z|_{z=0} = 0$ n'admettent que la solution banale $\phi = 0$ pour le problème adjoint.

4.8.4. Comparaison avec la distribution de sources :

Le calcul des efforts de dérive par intégration des pressions ayant été conduit en résolvant le problème cinématiquement équivalent aux corps en mouvement par une distribution de sources seules, il peut être intéressant d'examiner dans le même cas que précédemment le comportement de cette distribution.

Pour ce faire, nous avons résolu le problème hydrodynamique à l'aide d'une distribution de sources seules dans le cas du caisson D.N.V. maillé en 54 facettes.

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence les fréquences irrégulières, puis nous avons éliminé celles-ci à l'aide de l'artifice proposé par M.Sükan [105], qui consiste à mailler la surface libre intérieure du corps avec des facettes sur lesquelles on impose la condition $\partial\phi/\partial z|_{z=0} = 0$, ce qui implique d'après (4.2) $\phi|_{z=0} = 0$. Dans ces conditions, la seule solution du problème de Dirichlet intérieur est $\phi = 0$. Les figures 4.34 et 4.35 montrent les résultats obtenus pour les coefficients CA_{33} et CM_{33} avec la distribution mixte de Green, la distribution mixte de Green avec $\phi = 0$ à l'intérieur du corps, la distribution de sources avec $\partial\phi/\partial z|_{z=0} = 0$ (la surface libre intérieure du corps complet étant maillée en 4 facettes de dimensions égales).

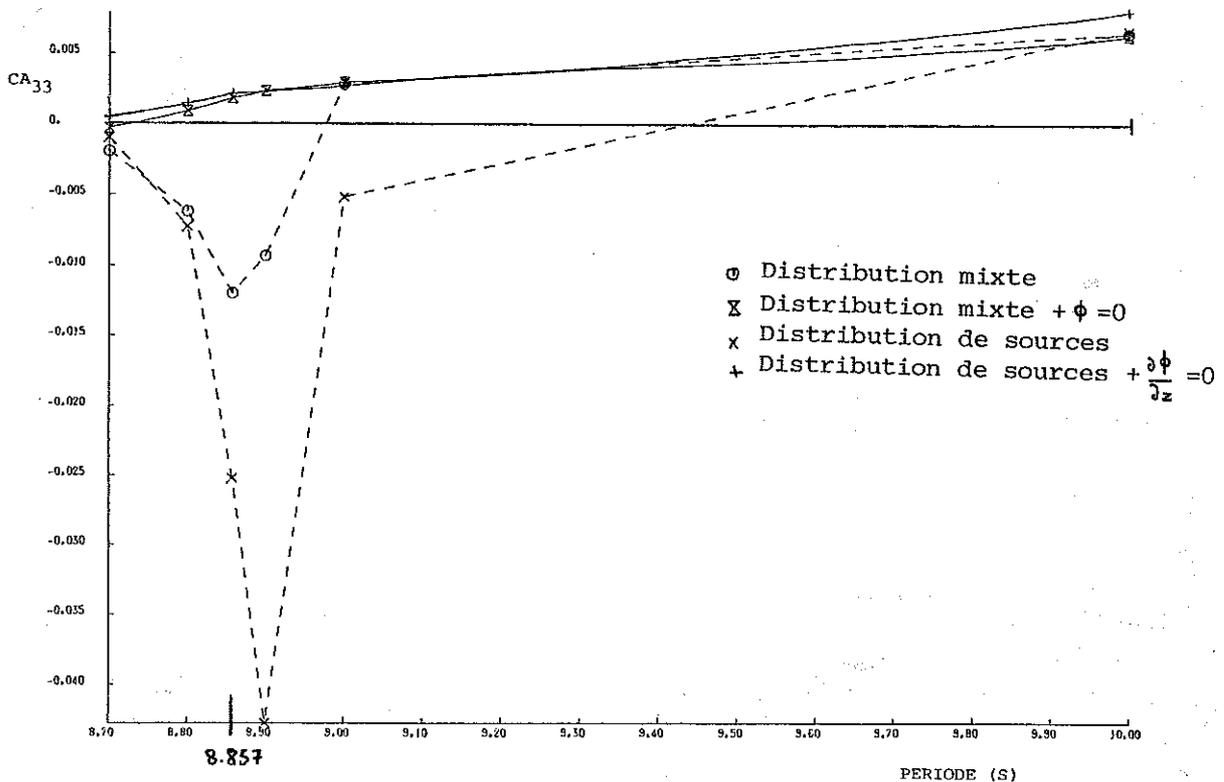


Figure 4.34

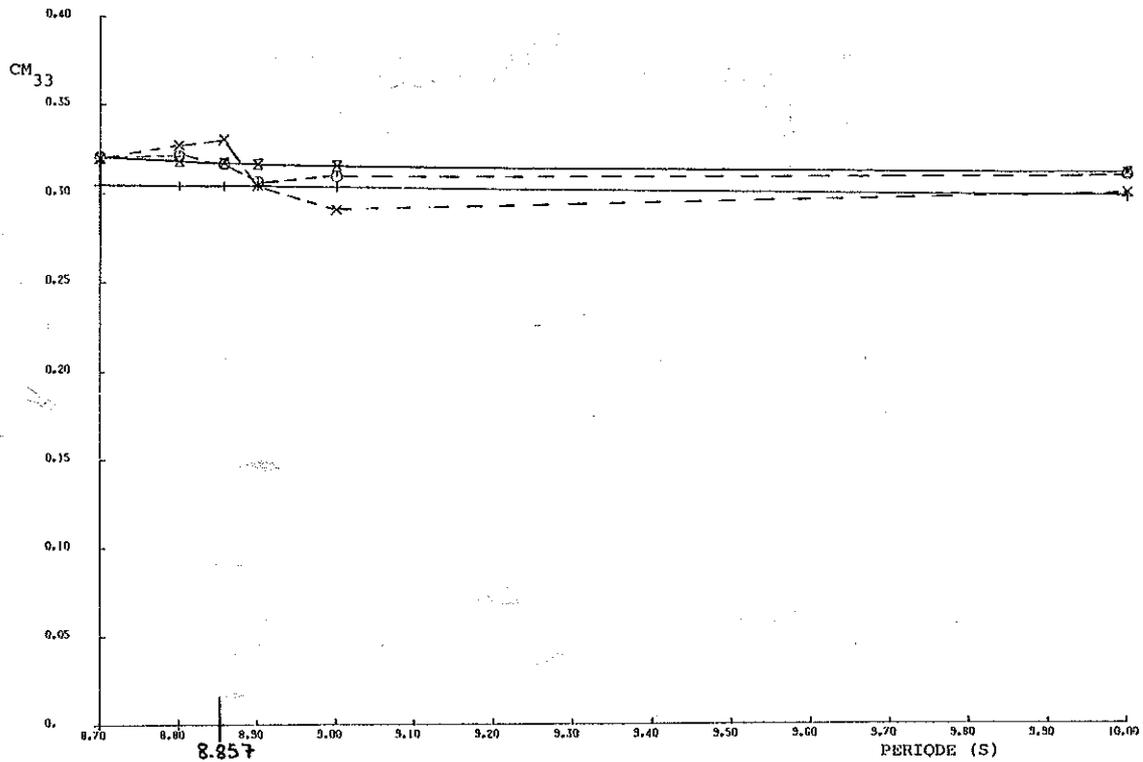


Figure 4.35

On remarque que les deux méthodes d'élimination des fréquences irrégulières sont efficaces et perturbent peu les solutions en dehors de ces fréquences.

Comme en bidimensionnel, la perturbation est plus intense pour les sources que pour la distribution mixte et elle intéresse une gamme de période plus étendue.

4.8.5. Conclusion :

Lorsque l'on a à résoudre le problème de diffraction-radiation pour un corps perçant la surface libre, on peut aisément estimer la période de la première fréquence irrégulière T_1 à l'aide de la formule (4.5), en inscrivant la surface de flottaison dans un rectangle de longueur L et de largeur B .

Les calculs pourront être conduits sans précaution particulière pour $T > T_1$. Si l'on s'intéresse à des phénomènes se produisant autour de $T = T_1$ pour lesquels les formulations asymptotiques ne sont pas satisfaisantes, on dispose de méthodes d'élimination efficaces. On doit cependant remarquer, comme S.R.Breit [8] que l'influence des fréquences irrégulières est de plus en plus faible et localisée lorsqu'on raffine le maillage, ce qui, à la limite peut rendre les méthodes d'élimination inutiles.

4.9. SUGGESTIONS , PERSPECTIVES :

4.9.1. Comparaison avec d'autres programmes :

Les comparaisons entre les programmes de calcul réalisées à l'occasion de tests internationaux [107] [108] [28] ont montré en général un accord satisfaisant des différents programmes tridimensionnels fondés sur la théorie exposée précédemment, les écarts constatés devant principalement être imputés aux discrétisations différentes. Les autres programmes utilisés peuvent se classer en deux groupes : ceux utilisant la méthode des éléments finis (C.C.Meï au M.I.T. [68], J.L.Chenot à l'I.F.P. et Franlab Marine [11], D.Martin à l'E.N.S.T.A. [84]), et ceux utilisant la méthode des singularités (J.C. Lebreton à l'E.D.F. [81], L.M.Faltinsen au D.N.V. [34], G.Van Oortmerssen au N.S.M.B. [109], N.Hogben au N.M.I. [70]). Les programmes utilisant la méthode des singularités emploient la distribution de sources, généralement intégrée numériquement sur les facettes (E.D.F. , D.N.V.). L'approche utilisée au N.M.I. consiste à intégrer uniquement sur les facettes les coefficients en $1/R$ et le coefficient d'autoinfluence de la fonction de Green, cette dernière étant représentée par une source ponctuelle dans les autres cas. Cette méthode fournit une approximation d'autant plus valable que le nombre de facettes est élevé.

4.9.2. Développements futurs :

Le principal inconvénient des programmes de calcul tridimensionnel est le temps de calcul qui peut devenir important lorsqu'on traite des structures complexes devant être discrétisées finement, surtout en profondeur finie.

Différentes méthodes peuvent être envisagées pour diminuer ces temps, par exemple la représentation des termes de la fonction de Green autres que ceux en $1/R$ par un petit nombre de singularités d'ordre supérieur (multipôles) [56], ou par des expressions analytiques dans des cas particuliers [5]. Une autre approche utilisée par J.N. Newman [93] et F. Noblesse [94] consiste à chercher des formulations approchées rapides de la fonction de Green. Les intégrations des coefficients d'influence par rapport aux variables d'espace sont alors effectuées soit de manière ponctuelle à l'aide des formules asymptotiques pour les facettes lointaines, soit par intégration numérique dans les autres cas.

La méthode la plus simple à mettre en oeuvre pour diminuer les temps de calcul à partir de notre formulation consiste à utiliser l'approximation faite par le N.M.I., ce qui revient à calculer la partie des coefficients d'influence fonction d'une intégrale en ζ à l'aide des formulations asymptotiques définies au chapitre 3. Cette approximation permet de diviser les temps de calcul par un facteur supérieur à 4, au prix d'une imprécision de l'ordre de 1 % sur l'évaluation des coefficients hydrodynamiques et des efforts d'excitation. Si l'on consent à cette imprécision, il est possible de diminuer encore les temps de calcul puisque l'intégrale donnant les coefficients d'influence n'est fonction que de $m_0 R$, $m_0 Z$ et éventuellement $m_0 H$ en profondeur finie. On peut donc envisager, soit de tabuler l'intégrale en fonction des paramètres précédents, soit de représenter celle-ci par son développement sur une base de fonctions connues, comme par exemple les exponentielles complexes. Nous nous proposons d'étudier , dans l'avenir, les avantages et les limites de ces approches.

Une autre difficulté du problème tient à la modélisation en facettes de structures complexes pour lesquelles le temps de préparation des données peut devenir supérieur aux temps de calcul. Il en résulte que celles-ci ne sont essayées, la plupart du temps, qu'avec un seul maillage, le domaine de validité de la discrétisation étant estimé à l'aide de critères tels que le nombre de facettes par longueur d'onde. Il est donc souhaitable de recourir à des techniques d'informatique graphique permettant de numériser la structure entrée, par exemple en utilisant un plan de formes et une tablette à digitaliser. Le maillage peut alors être paramétré aisément, en fonction des données numérisées, de manière interactive. Cette technique constitue plus qu'une facilité d'utilisation diminuant le temps de préparation des données, puisqu'elle permet de tester systématiquement la convergence des résultats en fonction du maillage, ce qui, pour des structures complexes, constitue un des points délicats de la méthode de résolution.

En dehors des deux points cités ci-dessus, qui seront toujours perfectibles et qui deviennent de moins en moins cruciaux avec l'amélioration des performances et des facilités d'emploi des ordinateurs, on peut estimer que le problème de la diffraction-radiation au premier ordre est actuellement résolu de façon satisfaisante.

2EME PARTIE
RESISTANCE DE VAGUES

INTRODUCTION :

Le problème de la résistance à l'avancement d'un navire animé d'une vitesse de route constante $\vec{C} = C \vec{i}_x$, avançant sur un plan d'eau initialement calme dans un fluide illimité, peut être résolu si l'on connaît l'écoulement autour de la carène. Par des considérations d'analyse dimensionnelle, on démontre que l'écoulement est régi par deux nombres adimensionnels, le nombre de Reynolds $Re = CL/v$, où v est la viscosité cinématique du fluide et L une longueur de référence, et le nombre de Froude $F_n = C/\sqrt{gL}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Si l'on suppose les deux effets indépendants, ce qui se vérifie expérimentalement avec une bonne approximation, puisque cette hypothèse constitue la base des essais sur modèle réduit, la résistance à l'avancement peut être décomposée en deux termes, l'un fonction du nombre de Reynolds seul, la résistance visqueuse, l'autre fonction du nombre de Froude seul, la résistance de vagues.

La résistance de vagues apparaît alors comme étant la résistance à l'avancement dans un fluide sans viscosité. Si l'on suppose en plus que le fluide est incompressible, on peut formuler le problème à l'aide du modèle du fluide parfait isovolume qui se prête relativement bien à des développements mathématiques. Bien que la résistance de vagues ne puisse faire l'objet d'une mesure directe, on constate expérimentalement que celle-ci est beaucoup plus sensible à de petites modifications de forme que la résistance visqueuse.

Ces considérations justifient l'intérêt porté à ce problème, ainsi que le développement de nombreuses théories visant au calcul de la résistance de vagues.

Après une étude bibliographique rappelant les principales étapes de l'étude du problème, nous décrirons plus particulièrement deux méthodes de résolution.

Dans le cinquième chapitre, nous formulerons le problème de Neumann-Kelvin, puis nous entreprendrons sa résolution par la méthode classique des singularités de Kelvin. Ce problème ayant déjà été longuement étudié, nous rappellerons les principaux résultats obtenus et nous insisterons sur les difficultés supplémentaires qui apparaissent pour les carènes perçant la surface libre.

Dans le sixième chapitre, nous présenterons la méthode des singularités de Rankine, employée pour la première fois pour résoudre ce problème par C.W.Dawson [18], puis nous étudierons sa mise en oeuvre et son efficacité dans des cas pratiques en comparant les résultats obtenus avec ceux d'autres théories, ainsi qu'aux expériences.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES :

Le principe de séparation de la résistance à l'avancement en deux termes indépendants, la résistance de vagues et la résistance visqueuse, a été formulé par W.Froude en 1872, ses travaux ayant été précédés par ceux de Reech en 1852.

Le premier modèle mathématique du problème de la résistance de vagues a été formulé et résolu par Michell en 1898 [89]. Ce modèle est fondé sur l'hypothèse du bateau mince et fut repris par Havelock en 1927 [67], la solution obtenue par celui-ci se prêtant mieux aux développements théoriques et aux calculs pratiques avec les moyens de l'époque. Les courbes de résistance de vagues issues de cette théorie mettent en évidence certains phénomènes tels que les interactions avant-arrière dans la génération des vagues, mais elles présentent des oscillations excessives par rapport aux résultats expérimentaux.

Dans les années 1960, l'apparition et le développement rapide des moyens de calcul automatique ont incité à chercher des modèles mathématiques de plus en plus complexes. En particulier, la méthode de calcul développée par Hess et Smith [68] a permis de tester l'hypothèse du double modèle où la carène est représentée par une distribution de singularités de densité constante par facette, la surface libre étant supposée rigide. Cette méthode n'a pas apporté d'amélioration notable par rapport à celle du bateau mince, les résultats étant même erronés lorsque la carène coupait la surface libre. Ce dernier point fut résolu par R.Brard [6], la cohérence du problème mathématique posé nécessitant l'introduction d'une intégrale curviligne sur le contour de la flottaison. Les résultats sont alors cohérents [42], mais restent éloignés des valeurs expérimentales. On est alors amené à formuler un problème plus complexe, le problème de Neumann-Kelvin, où la condition de glissement est écrite sur le corps, comme pour la méthode du double modèle, mais où l'on utilise une fonction de Green qui tient compte de la condition de surface libre linéarisée écrite dans le plan de la surface libre au repos. Ce modèle a été étudié au cours des années 1970. Les résultats sont satisfaisants pour des carènes immergées, mais le calcul de la fonction de Green pose des problèmes numériques lorsque le corps coupe la surface libre.

D'autres approches du problème de la résistance de vagues ont été essayées. En particulier, une méthode de calcul originale a été développée par R. Guilloton à partir de 1939 [59]. Il propose tout d'abord une méthode pratique de résolution du problème du bateau mince pour des carènes quelconques à l'aide d'opérateurs élémentaires, les coins, pour lesquels il a tabulé les solutions du potentiel de Michell [60] [61]. La véritable innovation a consisté en l'introduction en 1964 [62] d'une transformation permettant de définir une carène pour laquelle les conditions aux limites sont mieux satisfaites. Pour une carène donnée, on obtient après quelques itérations, des résultats en bon accord avec l'expérience, les extremums étant bien localisés, sans oscillations excessives aux faibles vitesses [29] [38] [21] [51] [52]. Le seul problème posé par cette méthode est que la convergence de la transformation n'est assurée que pour des carènes minces, sans bulbe ni tableau arrière.

En 1977, Dawson a proposé une méthode originale de calcul de la résistance de vagues utilisant des singularités de Rankine réparties sur la carène et une partie de la surface libre, la condition à écrire sur celle-ci étant satisfaite le long des lignes de courant par un schéma de différences finies. Les difficultés liées au calcul numérique de la fonction de Green sont alors supprimées, au détriment de la taille des systèmes linéaires à résoudre qui croit considérablement.

Pour faire le point sur l'état d'avancement des calculs de résistance de vagues, le D.T.N.S.R.D.C. (David Taylor Naval Ship Research and Development Center) de Washington proposa en 1978 une confrontation des différents programmes de calcul existants pour cinq carènes différentes : deux carènes analytiques, la carène de Wigley et le modèle d'Inui, un cargo Série 60, un pétrolier type H.S.V.A. et une vedette rapide Athena.

Les résultats des différents programmes furent présentés au cours d'une réunion (Workshop) tenue à Washington en 1979 [100]. Les méthodes utilisées se divisent en plusieurs groupes : les méthodes dérivées de celle du bateau mince, la méthode de Guilloton, les méthodes de Neumann-Kelvin, et la méthode de Dawson.

Les résultats obtenus par les méthodes type bateau mince présentent les mêmes problèmes que ceux décrits précédemment. La méthode de Guilloton donne de bons résultats pour les carènes minces (Wigley, Inui, Série 60) et n'a pu être employée pour les autres carènes. La dispersion des résultats issus des méthodes de Neumann-Kelvin met en évidence la difficulté de la résolution numérique du problème. Enfin, la méthode de Dawson donne des résultats intéressants et homogènes pour toutes les carènes [19]. Une conclusion annexe importante de cette réunion concerne la nécessité de disposer de résultats expérimentaux indiscutables permettant de tester la validité des différents modèles mathématiques.

Une suite fut organisée et une autre réunion eut lieu au Japon en 1980 [101]. Des résultats complémentaires concernant les méthodes employées furent présentées, particulièrement au sujet de la mise en oeuvre de la méthode des singularités de Rankine [91] [3].

Une autre réunion eut lieu à Washington en 1983 [102]. Devant la dispersion des résultats précédents, seule la carène de Wigley fut essayée systématiquement. En particulier, un ensemble d'expériences fines réalisées au Japon a permis d'obtenir des valeurs de référence pour cette carène [106]. On a pu constater des progrès dans le calcul numérique des fonctions de Green, ainsi que le développement de méthodes de calcul utilisant les singularités de Rankine.

Depuis 1983, cette tendance s'est confirmée et si quelques auteurs, tels F. Noblesse, ont obtenus des solutions approchées satisfaisantes du problème de Neumann-Kelvin [9], le nombre d'équipes travaillant sur la méthode des singularités de Rankine augmente très rapidement.

Ceci est dû essentiellement à la facilité de mise en oeuvre de la méthode qui permet d'avoir très rapidement des résultats de bonne qualité, alors que les limitations dues à la nécessité de résoudre des systèmes linéaires de rang élevé par des méthodes directes disparaissent avec les ordinateurs modernes, scalaires ou vectoriels.

Nous allons résumer les principaux résultats obtenus actuellement à l'aide de la méthode des singularités de Rankine.

Depuis les travaux initiaux de Dawson en 1977 [18], K. Mori au Japon a étudié en 1980 [91] les différents schémas de différences finies utilisables pour résoudre la condition de surface libre, ainsi que leur initialisation. En France, O. Daube du L.I.M.S.I. propose en 1980, une méthode dérivée de celle de Dawson, avec la possibilité d'itérer sur la déformée de la surface libre [14]. Les résultats obtenus sont bons, mais des problèmes de convergence apparaissent lors des itérations. En Suède, L. Larsson au S.S.P.A. applique, en 1983, la méthode de Dawson à toute une série de carènes [80]. En 1984, à la suite d'une rencontre entre le professeur J. Piquet du Groupe de Modélisation Numérique du Laboratoire d'Hydrodynamique Navale et L. Larsson nous avons entrepris la mise au point d'un code de calcul utilisant cette méthode. Le code réalisé en 1985, en collaboration avec J.J. Maisonneuve [86], a été appliqué à plusieurs types de carènes [24], et développé en 1986 pour tenir compte des effets de parois [25], ainsi que de portance [26]. Cette méthode est développée à l'étranger par de nombreuses équipes. Les principales ayant présenté des publications en 1986 sont les suivantes : G. Jensen, Z -X Mi, H. Söding de l'Institut für Schiffbau de Hambourg [72] ; F. Xia , L. Larsson du S.S.P.A. [112] [113] ; S. Ogiwara, A. Masuko de l'Université de Yokohama [96] ; B.H. Cheng, G.G. Borda, J.S. Dean, S.C. Fischer du D.T.N.S.R.D.C. [10] ; G.E. Gadd du British Marine Technology [39] ; et le N.S.M.B. [95]. Les sujets traités dans ces publications peuvent être regroupés par thèmes : mise en oeuvre de la méthode [112] [95], étude des problèmes de tableau arrière pour des carènes rapides [10], non-linéarités de surface libre [72] [112] [96] [39], profils portants en dérive [112] [113], et en gîte et dérive [26].

Cette méthode semble actuellement l'une des plus efficaces, tant pour les besoins de la pratique en architecture navale que pour étudier des problèmes nouveaux comme les non-linéarités ou les problèmes portants.

Chapitre 5 : RESOLUTION DU PROBLEME DE NEUMANN-KELVIN PAR UNE METHODE DE SINGULARITES DE KELVIN

INTRODUCTION :

Ce chapitre constitue essentiellement un rappel des résultats que nous avons déjà obtenus et qui ont été publiés dans les références [21] [45] [46] [47] [48].

Le problème de Neumann-Kelvin étant posé, on entreprend sa résolution par une méthode de singularités de Kelvin où la condition de surface libre est satisfaite par l'intermédiaire d'une fonction de Green. On formule alors les équations intégrales dans le cas d'une carène immergée, puis pour une carène coupant la surface libre. Après avoir établi l'expression de la fonction de Green, la résistance de vagues s'obtient soit par application du théorème des quantités de mouvement, à l'aide des fonctions de Kochin de la distribution de singularités, soit par d'autres méthodes telles que l'intégration directe des pressions sur la carène. La résolution numérique du problème est effectuée en utilisant une distribution de sources. Les résultats obtenus par cette méthode pour une carène immergée sont comparés aux expériences. On montre ensuite les difficultés numériques apparaissant lorsqu'on cherche à résoudre ce problème pour une carène coupant la surface libre, ainsi que les insuffisances des modèles de calcul simplifiés.

Nous concluons sur les possibilités pratiques de résolution du problème de Neumann-Kelvin à l'aide de la méthode présentée, ainsi que sur les solutions envisageables.

5.1. POSITION DU PROBLEME DE NEUMANN-KELVIN :

5.1.1. Définition du problème

Nous allons donc poser le problème mathématique à résoudre en utilisant les notations définies ci-dessous :

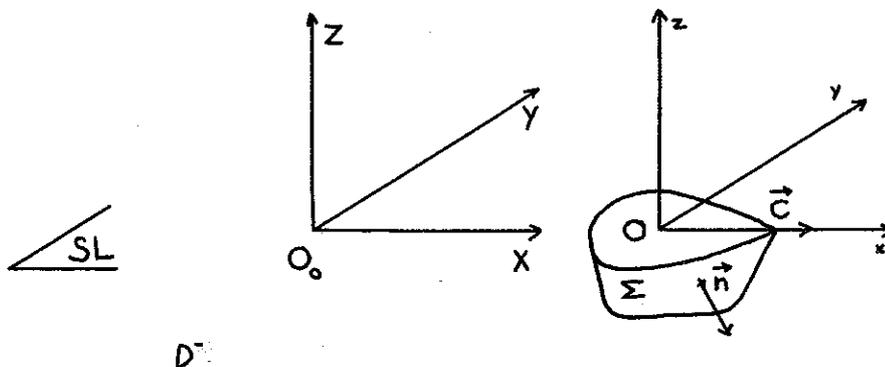


Figure 5.1

D^-	:	domaine fluide $z < 0$.
S_L	:	surface libre d'équation $z = \zeta(x, y, t)$
(O_0, X, Y, Z)	:	repère fixe orthonormé dont l'origine O_0 est dans le plan de la surface libre au repos, O_0Z étant la verticale ascendante.
Σ	:	carène en mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{C} = C \cdot \vec{i}_x$
\vec{n}	:	normale extérieure à la carène.
ϕ	:	potentiel absolu des vitesses.
$\vec{V} = \text{grad } \phi$:	vitesse dans le fluide.
p_a	:	pression atmosphérique.
ρ	:	masse volumique du fluide.

Le problème de la résistance de vagues consiste à trouver un potentiel absolu ϕ vérifiant, d'après l'annexe 1 :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{dans } D^- \quad \text{Equation de continuité} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{\Sigma} & \text{Condition de glissement} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \text{grad } V^2 \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} = F'(t) & \text{Conditions de surface libre} \\ g z = F(t) - \frac{p_a}{\rho} - \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} & \\ \phi \rightarrow 0 & \text{à l'infini, condition de radiation} \end{array} \right.$$

Toutes les grandeurs considérées sont des grandeurs absolues exprimées dans le repère absolu. On doit remarquer que, le mouvement de translation étant horizontal et uniforme, l'écoulement est permanent dans le repère lié à la carène. Nous allons donc exprimer les équations précédentes dans ce repère.

Si l'on souhaite, de plus, tenir compte implicitement d'une condition de comportement à l'infini dès la formulation du problème, on utilise l'hypothèse du fluide presque parfait de viscosité évanescence ε' .

Dans le repère mobile, en utilisant les résultats de l'annexe 1, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{repère fixe}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{repère mobile}} - C \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\text{repère mobile}}$$

et comme l'écoulement est permanent :

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{repère fixe}} = - C \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\text{repère mobile}}$$

Les équations du problème de la résistance de vagues s'écrivent donc pour un potentiel absolu ϕ exprimé dans le repère mobile :

. Equation de continuité :

$$(5.3) \quad \Delta \phi = 0$$

. Condition de glissement :

$$(5.4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{\Sigma}$$

. Equation de Lagrange :

La constante de Lagrange peut être déterminée en écrivant que le fluide est au repos à l'infini amont. On a alors :

$$F(t) = \frac{pa}{\rho} \quad \text{et} \quad F'(t) = 0$$

et l'équation de Lagrange s'écrit, en prenant la pression atmosphérique comme origine des pressions :

$$(5.5) \quad \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} - C \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

ou bien, en introduisant la vitesse relative :

$$\vec{V}_R = \vec{V} - C \cdot \vec{i}_x$$

$$(5.6) \quad \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V_R^2}{2} - \frac{C^2}{2} = 0$$

. Conditions de surface libre :

$$(5.7) \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{g}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{2\varepsilon'}{C} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{C} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{1}{2C^2} \vec{V} \cdot \text{grad } V^2 + 2\varepsilon' \frac{V^2}{C^2} \Big|_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

$$(5.8) \quad \zeta = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \left(\frac{C}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{V^2}{2g} - 2\varepsilon' \phi \right) \Big|_{z=\zeta(x,y)}$$

$z = \zeta(x,y)$ étant l'équation de la surface libre dans le repère relatif.

. Condition de radiation :

$\phi \rightarrow 0$ à l'infini.

Le problème ainsi posé est trop complexe pour avoir actuellement été résolu, les conditions de surface libre étant non-linéaires et écrites sur une surface inconnue a priori. Aussi, pour pouvoir utiliser les outils mathématiques dont on dispose, on est amené à effectuer des hypothèses supplémentaires conduisant à des problèmes plus

ou moins simplifiés.

Le problème de Neumann-Kelvin [6] [7] s'obtient à partir du problème de la résistance de vagues en linéarisant les équations de surface libre. On suppose donc :

- que la hauteur de vagues ζ est petite.
- que les vitesses absolues dans le fluide sont du même ordre de grandeur que ζ .

Nous verrons dans le chapitre suivant une autre interprétation des hypothèses conduisant aux conditions de surface libre linéarisées écrites dans le plan de la surface libre au repos.

5.1.2. Formulation mathématique du problème :

Ces hypothèses reviennent à classer les grandeurs suivant les puissances croissantes d'un petit paramètre ε que l'on suppose de l'ordre de grandeur de l'élévation de surface libre, comme dans le problème de diffraction-radiation .

On a donc :

$$\begin{aligned} \zeta &= O(\varepsilon) \\ \phi &= \varepsilon \phi^{(1)} + o(\varepsilon) \\ \vec{V} &= \vec{\text{grad}} \phi = \varepsilon \vec{V}^{(1)} + o(\varepsilon) \\ C &= O(1) \end{aligned}$$

Les équations de surface libre se développent autour de $z = 0$ en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,0) + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x,y,0) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y,0) + \zeta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z}(x,y,0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,0) + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}(x,y,0) \end{aligned}$$

Si l'on ne conserve dans les développements que les termes du premier ordre, et en posant $\phi_1 = \varepsilon \phi^{(1)}$, les conditions de surface libre s'écrivent au premier ordre :

$$(5.9) \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon'}{C} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{g}{C^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$(5.10) \quad \zeta = \frac{C}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{z=0}$$

La condition de glissement s'écrit :

$$(5.11) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Sigma} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{\Sigma}$$

On peut remarquer que la consistance du problème en terme de développement en série de puissance de ε impose que : $\vec{n} \cdot \vec{i}_x = O(\varepsilon)$, c'est-à-dire que la pente de la carène est faible suivant l'axe des x . Le problème de la résistance de vagues avec condition de surface libre linéarisée entraîne donc implicitement l'hypothèse d'une carène mince.

En omettant les indices 1, le problème de la résistance de vagues au premier ordre (problème de Neumann-Kelvin) s'écrit :

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \quad \text{dans } D^* \quad (z < 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Sigma} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{\Sigma} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon'}{C} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{g}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = E \phi \Big|_{z=0} = 0 \\ \phi \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini} \end{array} \right.$$

Une fois résolu ce problème, on peut calculer les pressions dans le fluide à l'aide de l'équation de Lagrange développée aux différents ordres comme dans le chapitre 1 de la première partie, la constante de Lagrange disparaissant si l'on prend la pression atmosphérique p_a comme origine des pressions. Les pressions hydrodynamiques au premier ordre sont données par :

$$(5.13) \quad p_1 = -\rho g \overrightarrow{P_0 P_1} \cdot \vec{i}_z + \rho C \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

où $\overrightarrow{P_0 P_1}$ est le déplacement d'un point de la carène par rapport à sa position statique.

La résultante des pressions due au terme en $\overrightarrow{P_0 P_1}$ est équilibrée par le rappel hydrostatique de la carène. La contribution de ce terme est donc de déterminer la position dynamique prise par la carène au cours de son mouvement.

Les développements précédents ont été effectués jusqu'au premier ordre inclus. En l'absence de renseignement sur le potentiel solution du problème au second ordre, on peut calculer la part des efforts du second ordre due au potentiel du premier ordre. La pression dynamique s'écrit alors :

$$(5.14) \quad p = \rho C \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

5.1.3. Choix d'une méthode de résolution :

Le problème de Neumann-Kelvin est un problème linéaire dont la résolution peut être entreprise par différentes méthodes telles que la méthode des singularités ou celle des éléments finis [27] [31] [46].

Dans ce chapitre, nous poserons le problème en termes de singularités de Kelvin (singularités satisfaisant la condition de surface libre à l'aide d'une fonction de Green) en utilisant les résultats de l'annexe 2.

5.2. EQUATIONS INTEGRALES :

5.2.1. Carène entièrement immergée :

Pour une carène entièrement immergée, nous pouvons appliquer directement les résultats du paragraphe V de l'annexe 2 en bénéficiant du fait que le mouvement est permanent dans le repère mobile. Si l'on définit la fonction de Green du problème par :

$$(5.15) \quad \mathcal{G}_j(M, M') = \frac{1}{MM'} + g(M, M')$$

Les équations intégrales permettant de déterminer les distributions de singularités cinématiquement équivalentes à la carène en mouvement s'écrivent :

- Pour une distribution mixte de Green :

$$(5.16) \quad \frac{\mu(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_j(M, M') dS(M') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} \mathcal{G}_j(M, M') dS(M')$$

- Pour une distribution de doublets normaux :

$$(5.17) \quad \frac{\mu(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_j(M, M') dS(M') = C \cdot x |_M$$

- Pour une distribution de sources :

$$(5.18) \quad \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_j(M, M') dS(M') = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M$$

5.2.2. Carène coupant la surface libre :

Dans ce cas, les calculs ne se présentent pas aussi simplement que précédemment et il faut appliquer la troisième formule de Green avec un terme correctif I_L , comme indiqué au paragraphe VI de l'annexe 2 et dans les références [6] [21].

Le terme complémentaire I_L s'écrit, pour le problème de la résistance de vagues :

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{aligned} I_L &= \frac{1}{4\pi} \iint_{SLe} \frac{\partial \phi_e}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SLe} \phi_e \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dS(M') \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{SLi} \frac{\partial \phi_i}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SLi} \phi_i \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dS(M') \end{aligned} \right.$$

La condition de surface libre du problème doit être vérifiée par ϕ_e , ϕ_i ainsi que par la fonction de Green $\mathcal{G}(M, M')$

En exprimant $\frac{\partial \phi_e}{\partial z'}$, $\frac{\partial \mathcal{G}(M, M')}{\partial z'}$ et $\frac{\partial \phi_i}{\partial z'}$

à l'aide de la condition de surface libre, il vient :

$$I_L = I_e + I_i$$

$$(5.20) \quad I_e = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \iint_{SLe} -\frac{1}{k_0} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x'^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial \phi_e}{\partial x'} \right) \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} - \phi_e(M') \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x'^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x'} \right) \Big|_{z'=0} \right] dx' dy'$$

$$(5.21) \quad I_i = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \iint_{SLi} -\frac{1}{k_0} \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x'^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} \right) \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} - \phi_i(M') \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x'^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x'} \right) \Big|_{z'=0} \right] dx' dy'$$

et en utilisant l'identité :

$$(5.22) \quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial A}{\partial x'} \right) B = \frac{\partial}{\partial x'} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x'} - \frac{2\varepsilon'}{c} A \right) B \right] - \frac{\partial B}{\partial x'} \left(\frac{\partial A}{\partial x'} - \frac{2\varepsilon'}{c} A \right)$$

il vient, après avoir fait tendre ε' vers zéro par valeurs positives

$$(5.23) \quad I_e = -\frac{1}{4\pi k_0} \iint_{SL_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial \phi_e}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} - \frac{\partial \mathcal{G}(M, M')}{\partial x'} \Big|_{z'=0} \phi_e(M') \right] \right\} dx' dy'$$

$$(5.24) \quad I_i = -\frac{1}{4\pi k_0} \iint_{SL_i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} - \frac{\partial \mathcal{G}(M, M')}{\partial x'} \Big|_{z'=0} \phi_i(M') \right] \right\} dx' dy'$$

Ces expressions peuvent être transformées par application de la formule de Stokes :

$$(5.25) \quad + \iint_S \frac{\partial M}{\partial x'} dx' dy' = \int_C M dy'$$

où C est parcourue dans un sens positif par rapport à l'orientation de la normale à la surface S.

La surface libre SL_e est limitée par le contour de la carène CF et le contour à l'infini C_{SL_∞} , et la surface SL_i par le contour CF. Compte tenu des sens de rotations sur les contours C_{SL_∞} et CF, il vient :

$$(5.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_L = I_e + I_i = -\frac{1}{4\pi k_0} \int_{C_{SL_\infty}} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') - \phi_e(M') \frac{\partial \mathcal{G}(M, M')}{\partial x'} \right) dy' \\ + \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} \left[\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x'} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} \right) \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} - (\phi_e - \phi_i)_{M'} \frac{\partial \mathcal{G}(M, M')}{\partial x'} \Big|_{z'=0} \right] dy' \end{array} \right.$$

et si la fonction de Green $\mathcal{G}(M, M')$ présente un comportement à l'infini tel que l'intégrale sur C_{SL_∞} est nulle, ce qu'il faudra vérifier, la troisième formule de Green s'écrit :

$$(5.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e D^- \quad \phi_e(M, t) \\ M \in \Sigma \quad \frac{\phi_e(M) + \phi_i(M)}{2} \\ M \in \tau_i \quad \phi_i(M) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial n_{M'}} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_{M'}} \right) \mathcal{G}(M, M') dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\phi_e - \phi_i)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}(M, M') dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi k_0} \left[\int_{CF} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x'} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} \right) \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dy' - \right. \\ \left. \int_{CF} (\phi_e - \phi_i) \frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z'=0} dy' \right] \end{array} \right.$$

où Σ est la surface de la carène dont le contour de flottaison est CF, $\tau_e \cap D^-$ le domaine fluide extérieur à la carène et τ_i le domaine intérieur à la carène.

Si l'on définit la distribution de sources sur la carène par :

$$\sigma(M') = \frac{\partial \phi_e}{\partial n_{M'}} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_{M'}}$$

on a :

$$(5.28) \quad \frac{\partial \phi_e}{\partial x'} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x'} = \sigma(M') \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'}$$

Dans le cas d'une carène coupant la surface libre, les équations intégrales s'écrivent donc :

- Pour une distribution mixte de Green :

$$(5.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}(M, M') dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} [\mu(M') \frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') |_{z=0} - \frac{\partial \mu}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') |_{z=0}] dy' = \\ \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} \mathcal{G}(M, M') dS(M') - \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} \mathcal{G}(M, M') |_{z=0} dy' \end{array} \right.$$

- Pour une distribution de doublets normaux :

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}(M, M') dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} [\mu(M') \frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') |_{z=0} - \frac{\partial \mu}{\partial x'} \mathcal{G}(M, M') |_{z=0}] dy' = C \cdot x |_M \end{array} \right.$$

- Pour une distribution de sources :

$$(5.31) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \mathcal{G}(M, M') dS(M') + \\ \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} \sigma(M') \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} \frac{\partial}{\partial n_M} \mathcal{G}(M, M') |_{z'=0} dy' = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M \end{array} \right.$$

5.3. FONCTION DE GREEN :

Pour déterminer la fonction de Green du problème, nous allons appliquer les résultats du paragraphe X de l'annexe 2 en profondeur infinie.

Les formules (A2.92) ayant été établies dans le repère absolu, on pourra utiliser les résultats en exprimant la position des singularités par rapport à ce repère.

La fonction de Green est alors donnée par :

$$(5.32) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(M, M') = \frac{1}{MM'} - \frac{1}{MM'_1} + \phi_3 \quad M(x+ct, y, z) , M'(x'+ct, y', z') , M'_1(x'+ct, y', -z') \\ \phi_3 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk e^{k[z+i[(x+ct)\cos\theta + y\sin\theta]]} \hat{\phi}_{30}(\theta, k) \\ \hat{\phi}_{30}(\theta, k) = \frac{-ig}{\sqrt{gk}} \int_{-\infty}^t e^{k[z' - i[(x'+ct)\cos\theta + y'\sin\theta]]} [e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)}] d\tau \\ s_1 = -\epsilon' + i\sqrt{gk} \\ s_2 = -\epsilon' - i\sqrt{gk} \end{array} \right.$$

On peut mettre $\hat{\phi}_{30}(\theta, k)$ sous la forme :

$$\hat{\phi}_{30}(\theta, k) = e^{k[z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} a(t)$$

L'expression $a(t)$ se calcule aisément, on obtient :

$$a(t) = \frac{ig}{\sqrt{gk}} e^{-ikct \cos \theta} \left[\frac{e^{s_1(t-\tau)}}{s_1 + ikC \cos \theta} - \frac{e^{s_2(t-\tau)}}{s_2 + ikC \cos \theta} \right] \Big|_{-\infty}^t$$

$$a(t) = 2g e^{-ikct \cos \theta} \frac{1}{gk - 2i\epsilon'kC \cos \theta - k^2 C^2 \cos^2 \theta}$$

et en notant :

$$k_0 = \frac{g}{C^2}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

il vient :

$$a(t) = \frac{-2k_0 \sec^2 \theta e^{-ikct \cos \theta}}{k \left[k + 2i \frac{\epsilon'}{c} \sec \theta - k_0 \sec^2 \theta \right]}$$

Après avoir posé :

$$\mu^2 = 2 \frac{\epsilon'}{C} \cos \theta \quad \text{puisque} \quad \cos \theta > 0 \quad \text{pour} \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

On obtient l'expression classique de ϕ_3 :

$$(5.33) \quad \phi_3 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k_0 \sec^2 \theta \int_0^{\infty} dk \frac{e^{k[z+z'+i\varpi]}}{k - k_0 \sec^2 \theta + i\mu^2}$$

L'intégrale en k est une intégrale du type $I(K_0, Z)$ qui s'exprime aisément à partir des résultats du paragraphe III de l'annexe 3.

Si l'on pose :

$$(5.34) \quad \begin{cases} \zeta = k_0 \sec^2 \theta [z + z' + i\varpi] & |\operatorname{Arg}(\zeta)| < \pi \\ k_0 = \frac{g}{C^2} \\ \varpi = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta \end{cases}$$

La fonction de Green $\zeta(M, M')$ se met sous la forme :

$$(5.35) \quad \zeta(M, M') = \frac{1}{MM'} - \frac{1}{MM'_1} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^2 \theta G(\zeta)$$

avec :

$$(5.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(\zeta) = e^{\zeta} E_1(\zeta) \quad \text{pour } \text{Im}(\zeta) \geq 0 \\ \text{et} \\ G(\zeta) = e^{\zeta} [E_1(\zeta) - 2i\pi] \quad \text{pour } \text{Im}(\zeta) < 0 \end{array} \right. \quad |\text{Arg}(\zeta)| < \pi$$

$E_1(\zeta)$ étant l'exponentielle intégrale complexe d'ordre 1.

En tenant compte de l'égalité (A2.30) :

$$(5.37) \quad \frac{1}{M M'_1} = \frac{-1}{\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{z + z' + i\bar{\omega}}$$

On obtient l'expression équivalente suivante :

$$(5.38) \quad \mathcal{G}(M, M') = \frac{1}{M M'} + \frac{1}{M M'_1} - \frac{2}{\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^2 \theta \left[G(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right]$$

La fonction $G(\zeta)$ définie précédemment possède les propriétés suivantes, dérivées de celles de l'exponentielle intégrale $E_1(\zeta)$.

$$(5.39) \quad \int G(\zeta) d\zeta = G(\zeta) + \text{Log } \zeta \quad |\text{Arg}(\zeta)| < \pi$$

$$(5.40) \quad \frac{dG(z)}{dz} = G(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \quad |\text{Arg}(\zeta)| < \pi$$

Les expressions obtenues pour la fonction de Green sont classiques. Pour un corps entièrement immergé, on démontre [21] [33] que les hypothèses faites sur le comportement de la fonction de Green et de ses intégrales sont bien satisfaites. Il n'en est pas obligatoirement de même lorsque la carène coupe la surface libre, et si l'on conserve l'expression précédente de la fonction de Green dans les calculs par commodité, rien n'indique a priori que toutes les conditions de régularité sont bien satisfaites pour la fonction de Green.

Cette étude a été réalisée par D. Euvrard [33] qui a démontré que la fonction de Green calculée pour $z + z' < 0$ a encore un sens pour $z = z' = 0$ et est régulière pour $z' = 0$ et $z \leq 0$, à l'exception de la demi-droite $x < 0, z = 0$. Dès lors, les formules (5.36) et (5.38) peuvent être utilisées pour $z = z' = 0$, et l'on peut effectuer les calculs correspondant aux intégrales de ligne dans le plan de la surface libre sans précautions particulières.

5.4. COMPORTEMENT A L'INFINI :

5.4.1. Comportement à l'infini de la fonction de Green :

Si l'on se place en un point M situé à une distance horizontale r du point M', on peut écrire : $x-x' = r \cos \alpha$, $y-y' = r \sin \alpha$. Et en posant $\beta = \pi/2 - \alpha$:

$$(5.41) \quad \zeta = k_0 \sec^2 \theta [z+z'+i [(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]] = k_0 \sec^2 \theta [z+z'+i r \sin (\theta - \beta)]$$

avec :

$$\beta = \text{Arctg} \frac{-(x-x')}{y-y'} \quad \text{pour} \quad (y-y') \geq 0$$

La fonction de Green $\mathcal{G}(M,M')$ peut s'écrire sous la forme :

$$(5.42) \quad \mathcal{G}(M,M') = \frac{1}{MM'} - \frac{1}{MM'_1} - \frac{2k_0}{\pi} \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2 \theta e^{\zeta} E_1(\zeta) d\theta + \text{Re} 4 ik_0 \int_{-\pi/2}^{\beta} \sec^2 \theta e^{\zeta} d\theta$$

Compte tenu des développements asymptotiques de l'exponentielle intégrale, tous les termes, sauf le dernier, tendent vers zéro au moins comme $1/r$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

La dernière intégrale peut être évaluée en utilisant la méthode de la phase stationnaire dont les résultats sont donnés dans l'annexe 4 :

$$(5.43) \quad \int_{-\pi/2}^{\beta} \sec^2 \theta e^{\zeta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\beta} f(\theta) e^{i r g(\theta)} d\theta$$

avec :

$$f(\theta) = \sec^2 \theta e^{k_0 \sec^2 \theta (z+z')} \quad \text{et} \quad g(\theta) = k_0 \sec^2 \theta \sin (\theta - \beta)$$

On doit alors calculer :

$$(5.44) \quad g'(\theta) = k_0 \sec^2 \theta [\cos(\theta - \beta) + \sin(\theta - \beta) 2 \text{tg} \theta] = \frac{2k_0 \sec^2 \theta}{\text{tg} \theta - \text{tg} \beta} \sin(\theta - \beta) [\text{tg}^2 \theta - \frac{\text{tg} \beta \text{tg} \theta}{2} + \frac{1}{2}]$$

Cette expression ne peut s'annuler que pour les racines réelles de l'équation :

$$(5.45) \quad \text{tg}^2 \theta - \frac{\text{tg} \beta \text{tg} \theta}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

donc si :

$$(5.46) \quad \Delta = \frac{\text{tg}^2 \beta}{16} - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{soit} \quad \text{tg} \beta \geq \sqrt{8} \quad \text{ou} \quad \text{tg} \beta \leq -\sqrt{8}$$

Ce qui se produit à l'intérieur d'un dièdre de demi-angle au sommet:

$$\chi_0 = \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{8}}, \text{ appelé dièdre de Kelvin}$$

On peut alors continuer la discussion sur le comportement de la fonction de Green, en envisageant tous les cas possibles :

- $x-x' > 0$: on est devant le point M' .

$$\beta = \text{Arctg} \frac{-(x-x')}{y-y'} \quad y-y' \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta < 0$$

Les deux racines θ_1 et θ_2 de l'équation sont négatives et inférieures à $\text{tg} \beta$ en module, on a donc :

$$-\pi/2 \leq \beta < \theta_1 \leq \theta_2 \leq 0$$

La phase ne peut donc devenir stationnaire dans l'intervalle d'intégration.

- $x-x' < 0$:

On a alors :

$$-\pi/2 < 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \beta \leq \pi/2$$

L'expression de la phase stationnaire dépend du signe de $g''(\theta)$ pour $\theta=\theta_1$ ou $\theta=\theta_2$:

$$(5.47) \quad g''(\theta_1) = \frac{4k_0}{\cos^4 \theta_1} \frac{\sin(\theta_1 - \beta)}{\text{tg} \theta_1 - \text{tg} \beta} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \beta}{8} - 1} \right) < 0$$

$$(5.48) \quad g''(\theta_2) = \frac{4k_0}{\cos^4 \theta_2} \frac{\sin(\theta_2 - \beta)}{\text{tg} \theta_2 - \text{tg} \beta} \left(+\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\text{tg}^2 \beta}{8} - 1} \right) > 0$$

et enfin si $\text{tg} \beta = \sqrt{8}$:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_0 \text{ avec } \text{tg} \theta_0 = (\text{tg} \beta) / 4$$

on a alors :

$$g'(\theta_0) = g''(\theta_0) = 0$$

$$(5.49) \quad g'''(\theta_0) = \frac{4k_0}{\cos^6 \theta_0} \frac{\sin(\theta_0 - \beta)}{\operatorname{tg} \theta_0 - \operatorname{tg} \beta} = \frac{3\sqrt{6}}{2} k_0 > 0$$

Le comportement de la fonction de Green à l'infini est alors déterminé par la position du point M par rapport à M' :

- M en arrière de M' à l'intérieur du dièdre de Kelvin de sommet M' :

$$(5.50) \quad \mathcal{G}_j(M, M') \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

- M en arrière de M' sur les bords du dièdre de Kelvin de sommet M' :

$$(5.51) \quad \mathcal{G}_j(M, M') \sim \frac{1}{r^{1/3}}$$

- Dans les autres cas :

$$(5.52) \quad \mathcal{G}_j(M, M') \sim \frac{1}{r}$$

Pour une distribution de singularités située sur une surface Σ à distance finie de l'origine O, on peut poser :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{\rho} \quad , \quad \vec{R} = \vec{OM} \quad , \quad \vec{r} = \vec{M'M} \quad , \quad \vec{\rho} = \vec{OM'} = O(\epsilon)$$

En développant au premier ordre, on démontre comme au paragraphe 2.4 du chapitre 2 de la première partie :

$$(5.53) \quad \vec{r} = \vec{R} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} + o(\rho^2) \quad \text{d'où} \quad r \sim R$$

5.4.2. Potentiel induit à l'infini arrière par une distribution de singularités:

Le potentiel à l'infini arrière s'obtient en reportant les expressions asymptotiques de la fonction de Green dans la troisième formule de Green. On a donc, pour une carène coupant la surface libre :

$$(5.54) \left\{ \begin{aligned} \phi_1(M) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \mathcal{G}_{j_1}(M, M') dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_{j_1}(M, M') dS(M') \\ &+ \frac{1}{4\pi k_0} \left[\int_{CF} \sigma(M') \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} \mathcal{G}_{j_1}(M, M') |_{z'=0} dy' \right. \\ &\left. + \int_{CF} \mu(M') \frac{\partial}{\partial x'} \mathcal{G}_{j_1}(M, M') |_{z'=0} dy' - \int_{CF} \frac{\partial \mu}{\partial x'} \mathcal{G}_{j_1}(M, M') |_{z'=0} dy' \right] \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(5.55) \mathcal{G}_{j_1}(M, M') = \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\beta} 4 i k_0 \sec^2 \theta e^{\zeta} d\theta$$

qui peut être écrit :

$$(5.56) \mathcal{G}_{j_1}(M, M') = \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 i k_0 \sec^2 \theta e^{\zeta} d\theta$$

puisque le comportement de l'intégrale ne dépend que des valeurs de l'intégrand pour les racines θ_1 et θ_2 qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi/2, \beta]$.

Sous réserve de convergence, on peut permuter les intégrations et si l'on appelle p', q', r' , les composantes de la normale $\vec{n}_{M'}$, il vient :

$$(5.57) \phi_1(M) = \text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^2 \theta H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) e^{k_0 \sec^2 \theta [z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} d\theta$$

avec :

$$(5.58) \left\{ \begin{aligned} \text{a) } H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) &= H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) + H_L(\theta, k_0 \sec^2 \theta) \\ \text{b) } H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) &= \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma(M') + \mu(M') [r' - i(p' \cos \theta + q' \sin \theta)] k_0 \sec^2 \theta] \\ &\quad e^{k_0 \sec^2 \theta [z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} dS(M') \\ \text{c) } H_L(\theta, k_0 \sec^2 \theta) &= \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} [\sigma(M') p' - i k_0 \sec \theta \mu(M') - \frac{\partial \mu}{\partial x'}] \\ &\quad e^{-i k_0 \sec^2 \theta (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dy' \end{aligned} \right.$$

Le terme $H(\theta, k_0 \sec^2 \theta)$ est la fonction de Kochin des distributions. Cette fonction se décompose en deux parties :

- $H(\theta, k_0 \sec^2 \theta)$: fonction de Kochin pour une carène entièrement immergée [77]
- $H_L(\theta, k_0 \sec^2 \theta)$: intégrale de ligne dans le cas d'une carène coupant la surface libre.

Dans le cas d'une carène coupant la surface libre, les calculs précédents ont été établis en supposant que la fonction de Green présentait le même comportement que dans le cas d'une carène immergée. Ceci constitue une hypothèse qui reste à vérifier.

5.4.3. Hauteur de vagues à l'infini arrière :

On démontre de la même façon que la hauteur de vagues à l'infini arrière s'obtient à l'aide de l'équation :

$$(5.59) \quad h_1 = \frac{C}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{z=0}$$

Ce qui donne :

$$(5.60) \quad h_1 = -4 \frac{C}{g} k_0^2 \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \theta H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) e^{i k_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta$$

$H(\theta, k_0 \sec^2 \theta)$ étant définie comme précédemment .

5.4.4. Comportement des vitesses à l'infini :

Les vitesses s'obtiennent par dérivation du potentiel. Toutes les distributions de singularités étant cinématiquement équivalentes, nous allons considérer la distribution de sources. Les vitesses à l'infini peuvent s'écrire :

$$(5.61) \quad \vec{V}_\infty = \vec{\operatorname{grad}}_M \left[\frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \mathcal{G}_1(M, M') dS(M') + \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} \sigma(M') \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{z=0} \mathcal{G}_1(M, M') dy' \right]$$

avec $\mathcal{G}_1 = O(K/r^n)$ avec $n = 1, 1/2$ ou $1/3$ suivant la position respective des points M et M' .

D'après la formule (5.53) , on a :

$$\frac{1}{r^n} \sim \frac{1}{R^n} \left[1 + n \frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R^2} \right]$$

et comme sur une carène fermée :

$$\iint_{\Sigma} \sigma(M') dS(M') = 0 \quad \text{et} \quad \int_{CF} \sigma(M') \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{M'} dy' = 0$$

On en déduit que si la fonction de Green décroît comme $1/r^n$, la distribution de singularités cinématiquement équivalente au corps décroîtra plus vite que $1/r^n$. En particulier, sur les frontières à l'infini amont et à l'extérieur du dièdre de Kelvin, les vitesses tendent vers zéro comme $1/r^n$ avec $n > 1$.

Le plan de la surface libre est divisé en trois régions :

- La région I à l'extérieur des dièdres de Kelvin des singularités.
- La région II située sur le bord du dièdre d'une singularité.
- La région III à l'intérieur des dièdres de toutes les singularités.

La situation est résumée sur le schéma suivant :

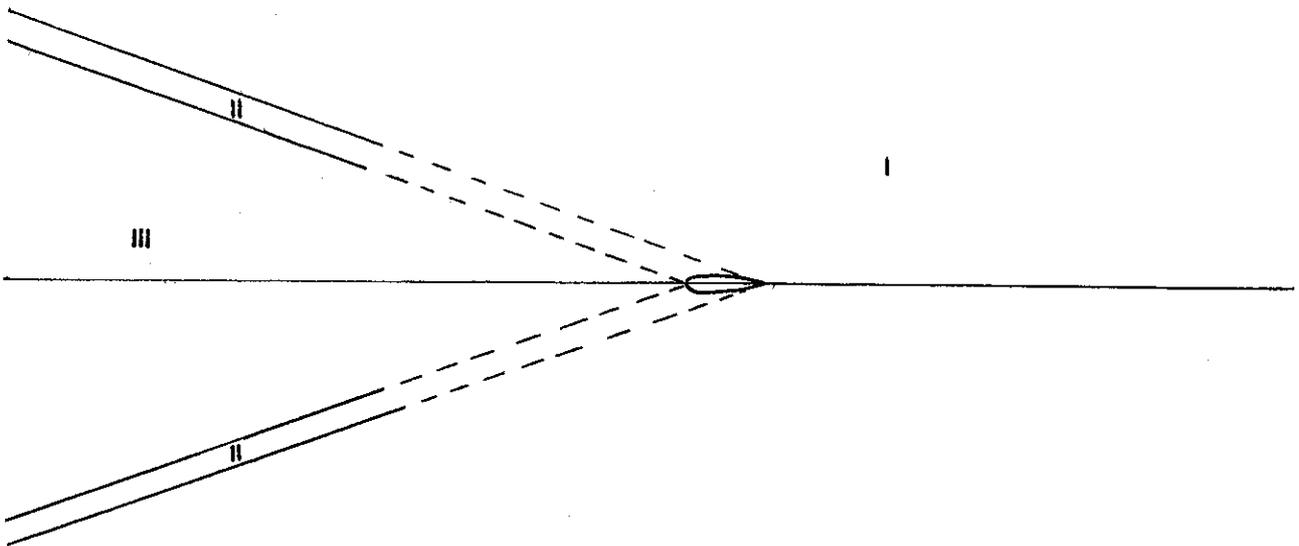


Figure 5.2

On a :

$$(5.62) \quad |\vec{V}_{\infty}| \sim \frac{C}{r^n}$$

avec

- $n > 1$ dans la région I
- $n > 1/3$ dans la région II
- $n > 1/2$ dans la région III

5.5. CALCUL DES EFFORTS SUR LA CARENE :

5.5.1. Calcul de la résistance de vagues par application du théorème des quantités de mouvement :

Nous allons rappeler le principe du calcul de la résistance de vagues par application du théorème des quantités de mouvement dans le repère relatif. Cette méthode a été employée par Kochin en 1937 [77], elle est décrite plus complètement dans les références [7][21] [45] [48] [77].

On considère un domaine lié à la carène constitué de la surface libre au repos, de la carène, d'un plan horizontal situé à une cote $z < 0$ et de quatre plans verticaux parallèles aux axes Ox et Oy à l'avant, à l'arrière et sur les côtés comme indiqué sur la figure ci-dessous :

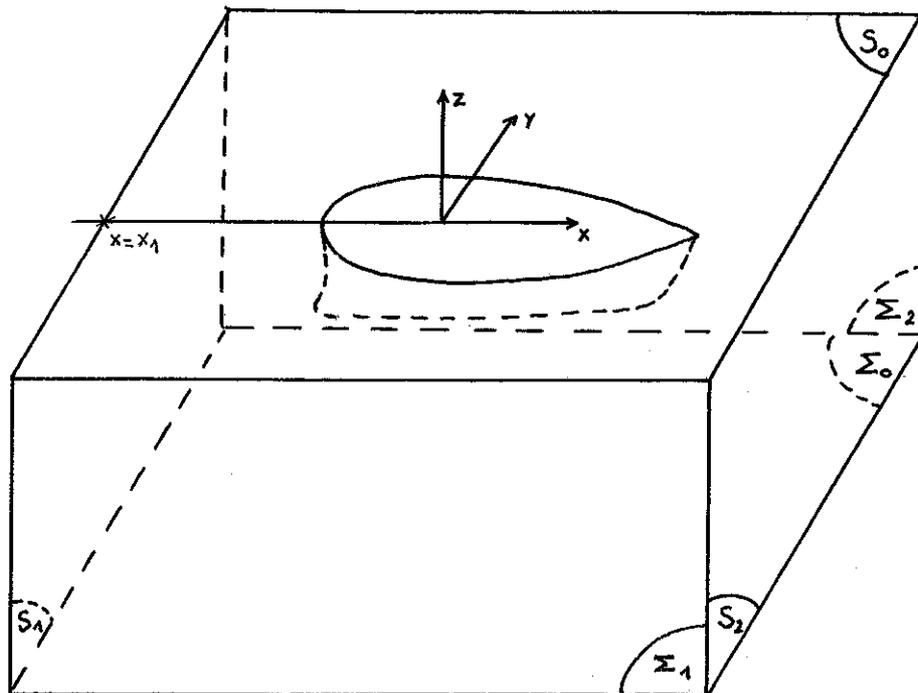


Figure 5.3

Le théorème d'Euler s'écrit en mouvement relatif permanent :

$$(5.63) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \rho \left[\iint_{S_2} (\vec{U}_r \cdot \vec{V}_r) dS_2 - \iint_{S_1} (\vec{U}_r \cdot \vec{V}_r) dS_1 \right. \\ \left. + \iint_{\Sigma_2} (\vec{v} \cdot \vec{V}_r) d\Sigma_2 - \iint_{\Sigma_1} (\vec{v} \cdot \vec{V}_r) d\Sigma_1 - \iint_{\Sigma_0} (\vec{w} \cdot \vec{V}_r) d\Sigma_0 \right] \\ S_0 \text{ est une surface de courant} \end{array} \right.$$

\vec{U}_r, v, w sont les composantes de la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V} - C \vec{i}_x$

Les forces extérieures s'écrivent :

$$(5.64) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = -Mg \vec{i}_z - \vec{R} - \iint_{S_2} p \vec{i}_x dS_2 + \iint_{S_1} p \vec{i}_x dS_1 \\ - \iint_{\Sigma_2} p \vec{i}_y d\Sigma_2 + \iint_{\Sigma_1} p \vec{i}_y d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_0} p \vec{i}_z d\Sigma_0 \end{array} \right.$$

\vec{R} étant la force exercée par le fluide sur le corps.

La pression p s'exprime par l'équation de Lagrange en mouvement relatif :

$$(5.65) \quad \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V_r^2}{2} = \frac{C^2}{2}$$

Compte tenu du comportement des vitesses à l'infini, la force nécessaire pour propulser le navire R_w s'écrit :

$$(5.66) \quad R_w = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \frac{\rho}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^0 dz [v^2 + w^2 - u^2]_{x_1} + g \int_{-\infty}^{+\infty} dy h^2|_{x_1} \right\}$$

où u, v, w , sont les vitesses absolues et h la hauteur de vagues à l'infini arrière.

En exprimant ces quantités à l'aide des fonctions de Kochin, on obtient après quelques calculs explicités dans les références [21] [45] [48] :

$$(5.67) \quad R_w = 8\pi\rho k_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3\theta |H(\theta, k_0 \sec^2\theta)|^2 d\theta$$

$H(\theta, k_0 \sec^2\theta)$ étant comme précédemment la fonction de Kochin des distributions sur toute la carène:

$$(5.68) \quad \left\{ \begin{aligned} H(\theta, k_0 \sec^2\theta) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\sigma(M') + \mu(M') [r' - i(p' \cos\theta + q' \sin\theta)] k_0 \sec^2\theta] \\ & e^{k_0 \sec^2\theta [z' - i(x' \cos\theta + y' \sin\theta)]} dS(M') \\ & + \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF} [\sigma(M') p' - i k_0 \sec\theta \mu(M') - \frac{\partial\mu}{\partial x'}] e^{-i k_0 \sec^2\theta (x' \cos\theta + y' \sin\theta)} dy' \end{aligned} \right.$$

Si la carène est symétrique par rapport à l'axe des x, on peut écrire :

$$(5.69) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{a) } R_w = & 16\pi\rho k_0^2 \int_0^{\pi/2} \sec^3\theta |H(\theta, k_0 \sec^2\theta)|^2 d\theta \\ \text{où bien} & \\ \text{b) } R_w = & 16\pi\rho k_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3\theta |H_m(\theta, k_0 \sec^2\theta)|^2 d\theta \end{aligned} \right.$$

$H_m(\theta, k_0 \sec^2\theta)$ étant la fonction de Kochin sur une moitié de la carène.

5.5.2. Calcul des efforts par intégration des pressions :

Pour calculer les efforts, nous allons appliquer les résultats du paragraphe 1.4.4. du chapitre 1 mais en nous limitant au cas d'une carène symétrique par rapport au plan xOz.

Nous calculerons d'abord les efforts du premier ordre, puis les déplacements au premier ordre, enfin les efforts au second ordre.

5.5.2.1. Détermination des efforts au premier ordre :

$$(5.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \vec{F}_1 = - \iint_{\Sigma} p_1 \cdot \vec{n} \, dS = \rho \iint_{\Sigma} C \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{n} \, dS \\ \text{b) } \vec{M}_1 = - \iint_{\Sigma} p_1 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS = \rho \iint_{\Sigma} C \frac{\partial \phi}{\partial x} (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \end{array} \right.$$

où P est un point de la carène et O l'origine du repère mobile.

5.5.2.2. Déplacements :

Les déplacements au premier ordre s'obtiennent en écrivant que la carène est en équilibre dans le repère mobile. Pour une carène symétrique par rapport à xOz, les seuls déplacements possibles sont l'enfoncement et l'assiette correspondant aux mouvements de pilonnement et de tangage. Les coefficients hydrostatiques sont donnés par :

$$(5.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{OG} = \frac{1}{M} \int_M \vec{OP} \, dm = X_G \vec{i}_x + Z_G \vec{i}_z \\ \vec{OC} = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{OP} \, dv = X_C \vec{i}_x + Z_C \vec{i}_z \\ S_{33} = \rho g \iint_{SF} dS = \rho g SF \\ S_{34} = S_{43} = S_{45} = S_{54} = 0 \\ S_{35} = S_{53} = -\rho g \iint_{SF} X \, dS \\ S_{55} = \rho g \iint_{SF} X^2 \, dS + \rho g V (Z_C - Z_G) \end{array} \right.$$

où V est le volume de carène, SF la surface de flottaison, G le centre de gravité et C le centre de carène.

L'enfoncement Z_B est donné par :

$$(5.72) \quad -S_{33} Z_B + F_{1z} = 0$$

et l'assiette θ_y par :

$$-Z_E S_{35} - \theta_y S_{55} + M_{1y} = 0$$

soit :

$$(5.73) \quad \theta_y = \frac{M_{1y} - Z_E S_{35}}{S_{55}}$$

5.5.2.3. Détermination des efforts au second ordre :

Une fois déterminés les déplacements, on peut calculer la part des efforts du second ordre due au potentiel et aux déplacements du premier ordre. On peut alors appliquer les formules (1.100) et (1.101) qui donnent les forces et les moments au second ordre.

$$(5.74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \vec{F}_2 = \theta_y (F_{1z} \vec{i}_x - F_{1x} \vec{i}_z) + \rho \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + Z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C\phi) \right] \vec{n} \, dS \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma} (\zeta_1 - Z_1)^2 \vec{n} \, d\Gamma \\ \text{b) } \vec{M}_2 = \theta_y (M_{1z} \vec{i}_x - M_{1x} \vec{i}_z) + \rho \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 + Z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C\phi) \right] (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma} (\zeta_1 - Z_1)^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, d\Gamma \end{array} \right.$$

avec :

$$\vec{OP} = X \vec{i}_x + Y \vec{i}_y + Z \vec{i}_z$$

$$Z_1 = Z_E - \theta_y X$$

Γ

déplacement vertical du point P

contour de la flottaison

$$\zeta_1 = \frac{C}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

hauteur de vagues à la flottaison.

La formule ci-dessus n'est pas d'un emploi aisé, puisqu'elle nécessite la connaissance de la dérivée en z de la vitesse. Cette difficulté peut être évitée en procédant de façon itérative. Après détermination des déplacements, on calcule le

potentiel autour de la carène déplacée Σ_d et l'on recommence jusqu'à l'équilibre. On a alors $Z_1 = 0$ et les expressions des efforts du second ordre s'écrivent :

$$(5.75) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \vec{F}_2 = \rho \iint_{\Sigma_d} \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 \vec{n} \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_d} \zeta_1^2 \vec{n} \, d\Gamma \\ \text{b) } \vec{M}_2 = \rho \iint_{\Sigma_d} \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_d} \zeta_1^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, d\Gamma \end{array} \right.$$

5.5.3. Comparaison des deux méthodes.

Les deux méthodes exposées sont équivalentes lorsqu'on a résolu le problème complet et la comparaison des résultats est un test de bonne résolution. Le théorème des quantités de mouvement permet d'obtenir la résistance de vagues d'une distribution de singularités donnée de façon simple, sans avoir à calculer de fonctions de Green. Dès lors, cette méthode se prête beaucoup mieux aux approximations et ceci explique son emploi systématique pour calculer la résistance de vagues dans les hypothèses du bateau mince et du double modèle. Des formules analogues à celle de la résistance de vagues peuvent être établies pour la force verticale et le moment de tangage [77].

La méthode de calcul par intégration des pressions nécessite le calcul des vitesses sur le corps. Le calcul pour une distribution de singularités donnée est donc pratiquement aussi compliqué que dans le cas où celle-ci est inconnue, puisque les fonctions de Green doivent être calculées dans les deux cas. Cette méthode permet cependant d'obtenir des renseignements supplémentaires, tels que les pressions locales et les vitesses, donc les lignes de courant, aussi nous l'emploierons chaque fois que les vitesses sur le corps pourront être déterminées de façon simple lors de la résolution du problème.

5.6. APPROXIMATIONS DU PROBLEME DE NEUMANN-KELVIN :

Les approximations envisagées pour résoudre le problème de Neumann-Kelvin sont de deux sortes : soit on résout un problème intégral avec une condition de surface libre approchée (hypothèse du nombre de Froude infini ou du nombre de Froude zéro), soit on impose la distribution de singularités (hypothèse du bateau mince). Dans les deux cas, la résistance de vagues des distributions est calculée par les fonctions de Kochin.

5.6.1. Hypothèse du nombre de Froude infini :

La condition de surface libre du problème de Neumann-Kelvin s'écrit :

$$(5.76) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{g}{C^2}$$

Aux grandes vitesses, pour $C \rightarrow \infty$, cette condition devient :

$$(5.77) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{z=0} = 0$$

La surface libre est alors une ligne de jet et la fonction de Green $\mathcal{G}(M, M')$ dégénère en :

$$(5.78) \quad \mathcal{G}(M, M') = \frac{1}{MM'} - \frac{1}{MM'_1} \quad M'(x', y', z') \quad , \quad M'_1(x', y', -z')$$

L'équation intégrale permettant de calculer la distribution de sources cinématiquement équivalente à la carène, sous cette hypothèse, s'écrit :

$$(5.79) \quad \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{MM'} - \frac{1}{MM'_1} \right) dS(M') = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_M$$

Après résolution de cette équation intégrale, la résistance de vagues de la distribution de singularités s'obtient à partir des formules (5.68) et (5.69).

5.6.2. Hypothèse du nombre de Froude nul :

Cette fois, on écrit la condition de surface libre sous la forme :

$$(5.80) \quad \frac{1}{k_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

Si $C \rightarrow 0$, $1/k_0 \rightarrow 0$ et l'on tend vers la condition de surface libre du double modèle :

$$(5.81) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

La fonction de Green tend alors vers :

$$\mathcal{G}(M, M') = \frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1}$$

et l'équation intégrale donnant la distribution de sources s'écrit :

$$(5.82) \quad \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \right) dS(M') = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M$$

Après résolution, on obtient la résistance de vagues à partir des formules (5.68) et (5.69).

On doit remarquer que dans ces deux hypothèses, il subsiste une intégrale de ligne dans le calcul de la fonction de Kochin.

5.6.3. Hypothèse du bateau mince :

Le problème du bateau mince a été formulé initialement par Michell en 1898 [89]. La solution qu'il a obtenue se présente sous la forme d'une somme d'intégrales de Fourier, à partir desquelles on peut calculer la résistance de vagues. Cette méthode a été utilisée par Guilloton [59] [60] pour calculer la résistance de vagues d'une carène quelconque par la méthode des coins [61] [62]. Les formules utilisées sont données dans les références [20] et [21]. Une solution pratique du problème du bateau mince a été obtenue par Havelock en 1925 [67], grâce à l'utilisation d'une distribution de sources situées dans le plan longitudinal de symétrie.

Nous allons résumer ci-dessous les résultats obtenus par Havelock.

Le problème du bateau mince est défini par :

$$(5.83) \quad \begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } D^- \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon'}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -C \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation de la carène étant donnée par : $y = \pm \eta(x, z)$

L'équation intégrale du problème s'écrit :

$$(5.84) \quad \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \psi_g(M, M') dS(M') = C \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \Big|_M$$

Si la carène est infiniment mince et si les pentes $\partial \eta / \partial x$ et $\partial \eta / \partial z$ de la carène sont de carré négligeable vis-à-vis de l'unité, cette équation dégénère en :

$$(5.85) \quad \frac{\sigma(M)}{2} = -C \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_M \quad M(x,0,z)$$

La distribution de sources est alors connue directement sans avoir à résoudre d'équation intégrale. La résistance de vagues se calcule ensuite par :

$$(5.86) \quad R_w = 16 \pi \rho k_0^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sec^3 \theta |H^0(\theta, k_0 \sec^2 \theta)|^2$$

avec

$$(5.87) \quad H^0(\theta, k_0 \sec^2 \theta) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_p} \left(-2C \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{M'} e^{k_0 \sec^2 \theta (z' - i x' \cos \theta)} dx' dz'$$

Σ_p étant la projection de la carène dans le plan longitudinal de symétrie. On remarque que, grâce à l'hypothèse du bateau mince, l'intégrale de ligne des formules (5.58) disparaît. Par ailleurs, la solution obtenue par cette méthode est la seule consistante au sens du développement en série de perturbations puisque la linéarisation de la condition de surface libre entraîne l'hypothèse du bateau mince.

5.7. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DISCRETISE :

Nous allons maintenant expliciter les formules précédentes dans le cas d'une carène discrétisée en facettes planes. Nous choisirons de résoudre le problème à l'aide d'une distribution de sources pour deux raisons : tout d'abord les intégrales de ligne des coefficients d'influence sont plus simples car elles ne font pas intervenir la dérivée des distributions par rapport à x , ce qui pose un problème lorsqu'on fait l'hypothèse de la densité constante par facette, et ensuite cette distribution permet d'obtenir directement les vitesses sur la carène, ce qui rend possible la comparaison de deux méthodes de calcul des efforts (paragraphe 5.5.3).

5.7.1. Equations intégrales discrétisées :

Les équations intégrales du problème peuvent être discrétisées suivant la méthode indiquée dans l'annexe 5. Si on les écrit en autant de points de contrôle qu'il y a de facettes, on obtient un système linéaire collocatif qui s'écrit, d'après (5.31) :

$$(5.88) \quad \sum_{j=1}^N \sigma_j K_{ij} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x \Big|_{M_i}$$

avec :

$$(5.89) \quad \begin{cases} K_{ij} = -\frac{1}{4\pi} [p_i V_x + q_i V_y + r_i V_z] & \text{pour } i \neq j \\ K_{ij} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} [p_i V_x + q_i V_y + r_i V_z] & \text{pour } i = j \end{cases}$$

avec (p_i, q_i, r_i) , cosinus directeurs de la normale à la facette i .

$$(5.90) \quad \begin{cases} V_x = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{G}(M, M') ds_j(M') - \frac{1}{k_0} \int_{CF_j} p_j \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{G}(M, M') |_{z'=0} dy' \\ V_y = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}(M, M') ds_j(M') - \frac{1}{k_0} \int_{CF_j} p_j \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}(M, M') |_{z'=0} dy' \\ V_z = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(M, M') ds_j(M') - \frac{1}{k_0} \int_{CF_j} p_j \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G}(M, M') |_{z'=0} dy' \end{cases}$$

s_j désignant la surface de la facette j et CF_j le côté de la facette j situé dans le plan $z = 0$, p_j étant la composante en x de la normale à la facette s_j dont un côté (CF_j) est situé dans le plan de la flottaison.

5.7.2. Coefficients d'influence :

Les formules donnant les coefficients d'influence seront établies en utilisant la formule (5.38) pour l'intégrale double sur s_j et la formule (5.35) pour l'intégrale sur le contour CF_j .

On posera :

$$(5.91) \quad \begin{cases} V_{s_x}^0 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{MM'} ds_j(M') & ; & V_{s_x}^1 = \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{MM'_1} ds_j(M') \\ \quad \quad \quad y & & \quad \quad \quad y \\ \quad \quad \quad z & & \quad \quad \quad z \\ V_{s_x}^2 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \quad k_0 \sec^2 \theta \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \left[G(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right] ds_j(M') \\ \quad \quad \quad y & & \quad \quad \quad y \\ \quad \quad \quad z & & \quad \quad \quad z \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \\ I_y \\ I_z \end{array} \right. = -\frac{1}{k_0} \int_{CF_j} p_j \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{G}(M, M') \Big|_{z=0} dy' = \frac{2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sec^2 \theta \int_{CF_j} \frac{\partial}{\partial x} G(\zeta) \frac{y}{z} dy'$$

$$\zeta = k_0 \sec^2 \theta [z+z' + i [(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]] \quad , \quad k_0 = \frac{g}{C^2}$$

a) Les expressions $V_{sx}^o, V_{sy}^o, V_{sz}^o$ s'obtiennent directement à partir des résultats du paragraphe II de l'annexe 6.

b) Les expressions $V_{sx}^1, V_{sy}^1, V_{sz}^1$ s'obtiennent en effectuant les changements de variables suivants dans les formules du paragraphe II de l'annexe 6.

- Pour les formules asymptotiques :

$$(5.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{sx}^1 = \mathcal{A} \frac{x_G - x_i}{R_0(-z_G)} \\ V_{sy}^1 = \mathcal{A} \frac{y_G - y_i}{R_0(-z_G)} \\ V_{sz}^1 = \mathcal{A} \frac{-z_G - z_i}{R_0(-z_G)} \end{array} \right.$$

- Pour les formules exactes :

$$(5.93) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{sx}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_x} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{sy}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_y} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{sz}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_z} (-z'_k, -z'_{k+1}) \end{array} \right.$$

\mathcal{A} étant l'aire de la facette j , de centre de gravité $G(x_G, y_G, z_G)$ et de sommets $M'_k(x'_k, y'_k, z'_k)$.

c) Les termes $V_{sx}^2, V_{sy}^2, V_{sz}^2$ se calculent par dérivation compte tenu de :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = i k_0 \sec \theta \frac{d}{d\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = i k_0 \sec^2 \theta \sin \theta \frac{d}{d\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = k_0 \sec^2 \theta \frac{d}{d\zeta}$$

On peut alors appliquer les résultats du paragraphe V de l'annexe 6, il vient :

$$(5.94) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{s_x}^2 &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^2 \theta (i \cos \theta) A_k^m \\ V_{s_y}^2 &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^2 \theta (i \sin \theta) A_k^m \\ V_{s_z}^2 &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^2 \theta A_k^m \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(5.95) \quad A_k^m = \sum_{j=1}^m [(q_j - i r_j \sin \theta) (x'_{k+1} - x'_k) - (p_j - i r_j \cos \theta) (y'_{k+1} - y'_k)] \Lambda_k$$

$$(5.96) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda_k &= \frac{G(\zeta_{k+1}) - G(\zeta_k)}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} & |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ \Lambda_k &= \frac{1}{2} \left[G(\zeta_{k+1}) + G(\zeta_k) - \frac{1}{\zeta_{k+1}} - \frac{1}{\zeta_k} \right] & |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{aligned} \right.$$

$$\zeta_k = k_0 \sec^2 \theta \left[z_i + z'_k + i [(x_i - x'_k) \cos \theta + (y_i - y'_k) \sin \theta] \right]$$

t étant une tolérance numérique.

d) Les termes I_x, I_y, I_z se calculent suivant le même principe.

Si l'on définit la normale au contour de flottaison dans le plan de la surface libre par :

$$p'_j x' + q'_j y' = d' \quad , \quad p'_j = \frac{p_j}{\sqrt{p_j^2 + q_j^2}} \quad , \quad q'_j = \frac{q_j}{\sqrt{p_j^2 + q_j^2}}$$

et compte tenu de :

$$\frac{\partial}{\partial x} G(\zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dG}{d\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dG}{dy'} \frac{dy'}{d\zeta}$$

$$\begin{array}{ccc} y & y & y \\ z & z & z \end{array}$$

Sur la droite CF_j, ζ est une fonction linéaire de y' définie par :

$$\zeta = k_0 \sec^2 \theta \left[z + z' + i \left(x - \frac{d' - q'_j y'}{p'_j} \right) \cos \theta + (y - y') \sin \theta \right] \Big|_{z=z'=0}$$

d'où :

$$\frac{d\zeta}{dy'} \Big|_{z=0} = -i k_0 \sec^2 \theta \left[\sin \theta - \frac{q'_j}{p'_j} \cos \theta \right] = \text{Cte} = \frac{\zeta_{k+1}^0 - \zeta_k^0}{y'_{k+1} - y'_k}$$

avec :

$$\zeta_k^0 = i k_0 \sec^2 \theta \left[(x_i - x'_k) \cos \theta + (y_i - y'_k) \sin \theta \right]$$

On a alors :

$$I_x = \frac{2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (i \cos \theta) (y'_{k+1} - y'_k) \int_{CF_j} \frac{dG}{\zeta_0^{k+1} - \zeta_0^k}$$

$$I_y = \frac{2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (i \sin \theta) (y'_{k+1} - y'_k) \int_{CF_j} \frac{dG}{\zeta_0^{k+1} - \zeta_0^k}$$

$$I_z = \frac{2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (y'_{k+1} - y'_k) \int_{CF_j} \frac{dG}{\zeta_0^{k+1} - \zeta_0^k}$$

Avant d'exprimer complètement les intégrales, il faut examiner les sens de rotations :

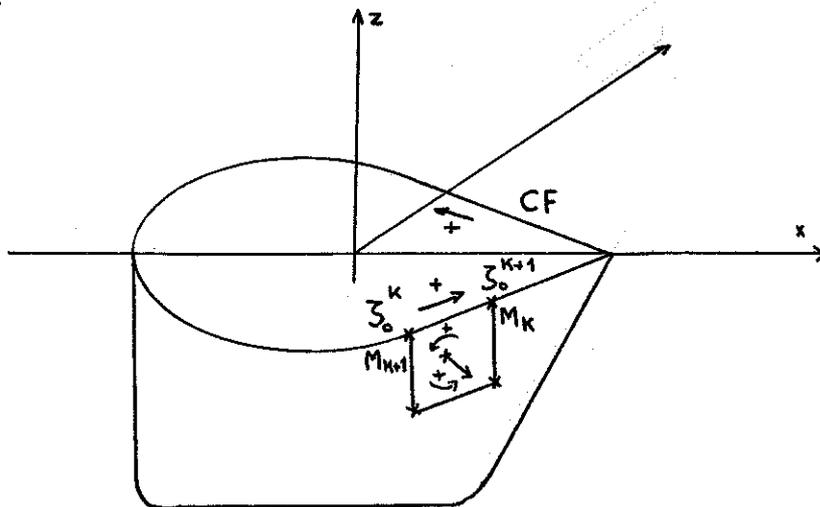


Figure 5.4

Sur la facette s_j , le point M_{k+1} correspond à ζ_k^0 et le point M_k à ζ_{k+1}^0 .

Les sens de rotations positifs sont donc inversés et si l'on exprime les intégrales de ligne avec les mêmes notations que les intégrales de surface, on a :

$$(5.97) \quad \begin{cases} I_x = \frac{-2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (i \cos \theta) (y'_{k+1} - y'_k) \Lambda_k \\ I_y = \frac{-2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (i \sin \theta) (y'_{k+1} - y'_k) \Lambda_k \\ I_z = \frac{-2 p_j}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta k_0 \sec^4 \theta (y'_{k+1} - y'_k) \Lambda_k \end{cases}$$

Λ_k étant défini par les formules (5.96).

5.7.3. Intégration numérique des coefficients d'influence :

Les intégrales figurant dans le calcul des coefficients d'influence sont des intégrales oscillantes présentant numériquement un comportement singulier pour $\theta = \pm \pi/2$.

L'intégrale de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ sera évaluée par la méthode de Simpson à $2N$ intervalles. On aura donc :

$$h = \pi / (2N)$$

et l'intégrale sera évaluée de la façon suivante :

$$(5.98) \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) d\theta = \frac{h}{3} [4f(-\frac{\pi}{2}+h) + 2f(-\frac{\pi}{2}+2h) + 4f(-\frac{\pi}{2}+3h) + \dots + 2f(\frac{\pi}{2}-2h) + 4f(\frac{\pi}{2}-h)]$$

les valeurs de $f(-\pi/2)$ et de $f(\pi/2)$ étant imposées nulles, ce qui correspond à leur limite théorique.

Dans la pratique, le nombre N sera choisi de telle façon que l'intégrale soit calculée avec une erreur absolue inférieure à 10^{-4} , conformément à celle tolérée sur les autres termes.

Pour une carène immergée, cette précision est atteinte avec $2N = 50$. Il est loin d'en être de même lorsque la carène coupe la surface libre, et ceci constitue le principal problème dans la mise en oeuvre de la méthode comme nous le montrerons au paragraphe suivant.

5.7.4. Méthode de résolution du système linéaire.

Le système linéaire obtenu est un système collocatif à coefficients réels, a priori à diagonale principale non strictement dominante. La résolution de ce système peut être effectuée sans précaution particulière avec la méthode directe de triangularisation de Gauss. On peut cependant remarquer que, dans le cas du problème de la résistance de vagues, la méthode itérative de Gauss-Seidel a convergé dans tous les cas testés. Il peut donc être intéressant d'essayer cette méthode de résolution pour les systèmes linéaires de grande taille comme on en rencontre lorsqu'on effectue les hypothèses des nombres de Froude nul ou infini.

5.7.5. Calcul de la résistance de vagues :

. Calcul par intégration des pressions :

Pour calculer la résistance de vagues par intégration des pressions, on se contentera de discrétiser les expressions (5.70) et (5.74) ou (5.75) en calculant les grandeurs aux points de contrôle des facettes et en multipliant le résultat par l'aire de la facette. On aura donc, au premier ordre :

$$(5.99) \quad \begin{cases} \vec{F}_1 = \rho C \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{M_j} \vec{n}_j \mathcal{A}_j \\ \vec{M}_1 = \rho C \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{M_j} (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) \mathcal{A}_j \end{cases}$$

\mathcal{A}_j étant l'aire de la facette j et G_j le point de contrôle de cette facette.

De la même façon, au second ordre :

$$(5.100) \quad \begin{cases} \vec{F}_2 = \rho \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2} (\vec{V}_j)^2 \vec{n}_j \mathcal{A}_j - \frac{\rho g}{2} \sum_{j=1}^M \zeta_{1j}^2 \vec{n}_j l_j \\ \vec{M}_2 = \rho \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2} (\vec{V}_j)^2 (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) \mathcal{A}_j - \frac{\rho g}{2} \sum_{j=1}^M \zeta_{1j}^2 (\vec{OG}_j \wedge \vec{n}_j) l_j \end{cases}$$

où N_1 est le nombre de facettes sur la carène déplacée, M le nombre de facettes aboutissant à la flottaison, \vec{V}_j la vitesse au point de contrôle de la facette j , ζ_{1j} la hauteur de vagues sur le segment j de la flottaison, de longueur l_j et de milieu G_j^o .

. Calcul par les fonctions de Kochin :

Le calcul peut être réalisé en intégrant les formules (5.68) sur les facettes.

A partir des résultats du paragraphe V de l'annexe 6, on obtient :

$$(5.101) \quad H(\theta, k_0 \sec^2 \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N H_j + \sum_{j=1}^M I_j$$

où N est le nombre de facettes sur la carène et M le nombre de facettes du contour de flottaison.

Pour une distribution de sources, on a :

$$H_j = \iint_{s_j} \sigma(M') e^{k_0 \sec^2 \theta [z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} ds_j(M')$$

Soit :

$$(5.102) \quad H_j = \frac{\sigma_j}{k_0 \sec^2 \theta} B_k^m$$

avec :

$$(5.103) \quad B_k^m = \sum_{k=1}^m [(q_j - i r_j \cos \theta) (x'_{k+1} - x'_k) - (p_j - i r_j \cos \theta) (y'_{k+1} - y'_k)] \tau_k$$

$$(5.104) \quad \begin{cases} \tau_k = \frac{e^{\zeta_{k+1}} - e^{\zeta_k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > t \\ \tau_k = \frac{1}{2} (e^{\zeta_{k+1}} + e^{\zeta_k}) & \text{pour } |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq t \end{cases}$$

$$\zeta_k = k_0 \sec^2 \theta [z'_k - i(x'_k \cos \theta + y'_k \sin \theta)]$$

L'intégrale de ligne I_j s'écrit :

$$I_j = \frac{1}{4\pi k_0} \int_{CF_j} \sigma(M') p' e^{k_0 \sec^2 \theta [z' - i(x' \cos \theta + y' \sin \theta)]} dy'$$

en utilisant les résultats du paragraphe 5.7.2.d , on obtient :

$$(5.105) \quad I_j = \frac{-1}{4\pi k_0} p_j \sigma_j (y'_{k+1} - y'_k) \tau_k$$

Le changement de signe correspondant aux sens de rotation positifs inversés sur la facette et sur le contour de la flottaison, τ_k étant défini par les formules (5.104).

Il ne reste plus qu'à intégrer numériquement l'expression ainsi obtenue de $-\pi/2$ à $\pi/2$ par la méthode de Simpson suivant le principe indiqué au paragraphe 5.7.3. Un nombre de points d'intégration de $2N = 200$ assure une précision meilleure que 1 % pour des nombres de Froude $F_n = C / \sqrt{gL} \geq 0,2$, L étant la plus grande dimension du

dimension du corps dans le sens de la vitesse de route (longueur à la flottaison ou longueur maximale).

5.7.6. Symétrie :

Si l'on considère une carène symétrique par rapport au plan xOz , la carène sera parfaitement définie si l'on ne décrit qu'une moitié notée B, l'autre moitié notée S étant obtenue par symétrie.

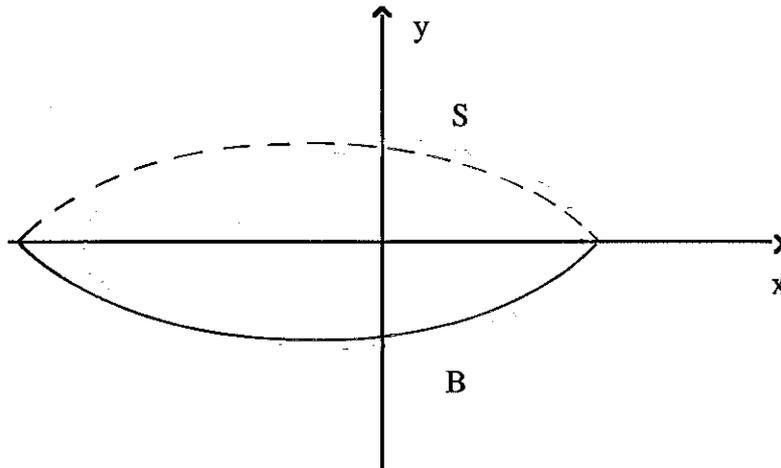


Figure 5.5

Le système linéaire permettant de déterminer la distribution de sources s'écrira :

$$(5.106) \quad \begin{pmatrix} S_{BB} & S_{SB} \\ S_{BS} & S_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_B \\ \sigma_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_{xB} \\ C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_{xS} \end{pmatrix}$$

où S_{SB} représente l'influence de la partie symétrique S sur la partie décrite B.

Comme $C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_{xB} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_{xS}$ et que d'après les formules (5.89) à (5.97) : $S_{BS} = S_{SB}$ et $S_{BB} = S_{SS}$, on en déduit : $\sigma_B = \sigma_S$. Dès lors, le nombre d'inconnues est divisé par 2 et le système linéaire s'écrit :

$$(5.107) \quad (S_{BB} + S_{SB}) \sigma_B = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_{xB}$$

On calculera donc directement les coefficients d'influence correspondant à la partie décrite sur elle-même et à la partie symétrique sur la partie décrite.

Le nombre de coefficients d'influence à calculer sera divisé par 2 et le temps de résolution des systèmes linéaires par un facteur supérieur à 4 (4 ou 8 suivant la méthode de résolution : Gauss-Seidel ou méthode directe).

Une fois calculées les distributions sur la moitié de la carène, la résistance de vagues s'obtiendra soit à partir de l'intégration des pressions en multipliant par 2 les efforts sur la demi-carène décrite, soit par les fonctions de Kochin en utilisant les formules (5.69 a) ou (5.69 b).

5.8. RESULTATS NUMERIQUES :

Nous allons présenter les résultats numériques pour deux carènes particulières, un ellipsoïde immergé pour lequel nous comparerons les diverses solutions du problème de Neumann-Kelvin, et une carène coupant la surface libre, la carène de Wigley qui est la carène actuellement la plus étudiée en résistance de vagues, tant sur le plan théorique qu'expérimental.

5.8.1. Ellipsoïde immergé :

La carène est un ellipsoïde de révolution d'axe horizontal d'allongement 5, la vitesse étant dirigée suivant le grand axe. Ce corps a été particulièrement étudié par C.Farell, qui a calculé analytiquement la résistance de vagues, solution du problème de Neumann-Kelvin, sous forme de séries [71] [35], et qui a comparé les résultats aux essais en bassin [36]. Les principaux résultats que nous avons obtenus pour cette carène ont été publiés dans les références [47], [48] et [21].

Nous présenterons ici les résultats obtenus pour la résistance de vagues avec les deux formulations, ainsi que la comparaison avec les résultats analytiques et expérimentaux.

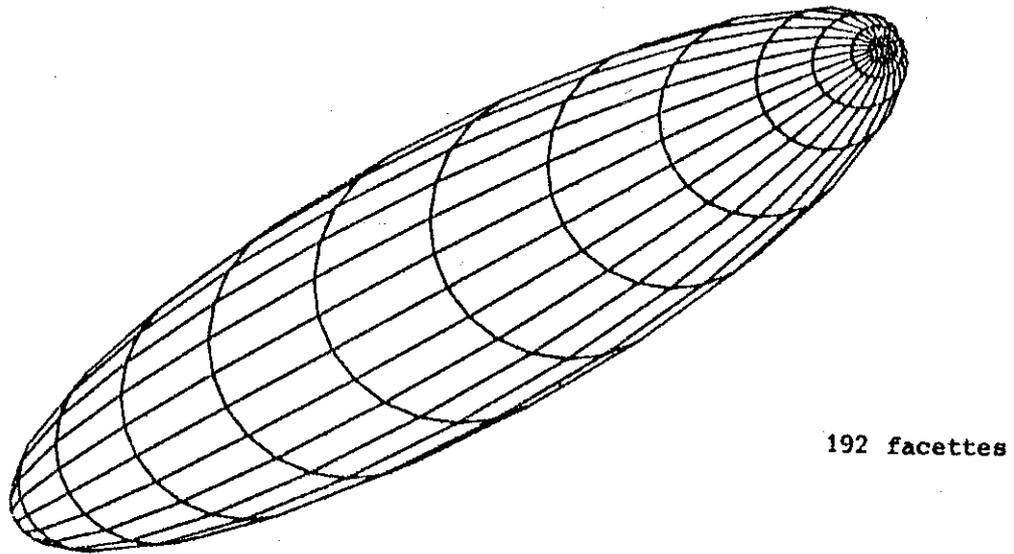
Les caractéristiques de la carène sont les suivantes :

Rayon : $b = 1\text{m}$
Longueur : $2a = L = 10\text{m}$
Immersion de l'axe : $H = 1,584\text{ m}$
Le nombre de Froude est défini par :

$$F_n = \frac{C}{\sqrt{gL}}$$

C étant la vitesse d'avance en m/s.

Cette carène a été discrétisée en 192 facettes sur la moitié. La figure 5.6 montre une vue en perspective du découpage.



192 facettes

Figure 5.6

L'intégration numérique représentant la principale difficulté de la méthode, nous avons représenté la fonction à intégrer dans le cas d'une facette située au milieu du corps près de la surface libre pour un nombre de Froude de $F_n = 0,35$.

Facette	$X_1 = 0$	$Y_1 = 0,2587$	$Z_1 = -0,6181$
	$X_2 = -1,294$	$Y_2 = 0,25$	$Z_2 = -0,651$
	$X_3 = -1,294$	$Y_3 = 0$	$Z_3 = -0,6181$
	$X_4 = 0$	$Y_4 = 0$	$Z_4 = -0,584$
Point influencé	$X_i = -0,647$	$Y_i = 0,1273$	$Z_i = -0,6174$
Normale	$p_i = -0,0261$	$q_i = 0,1305$	$r_i = 0,9911$

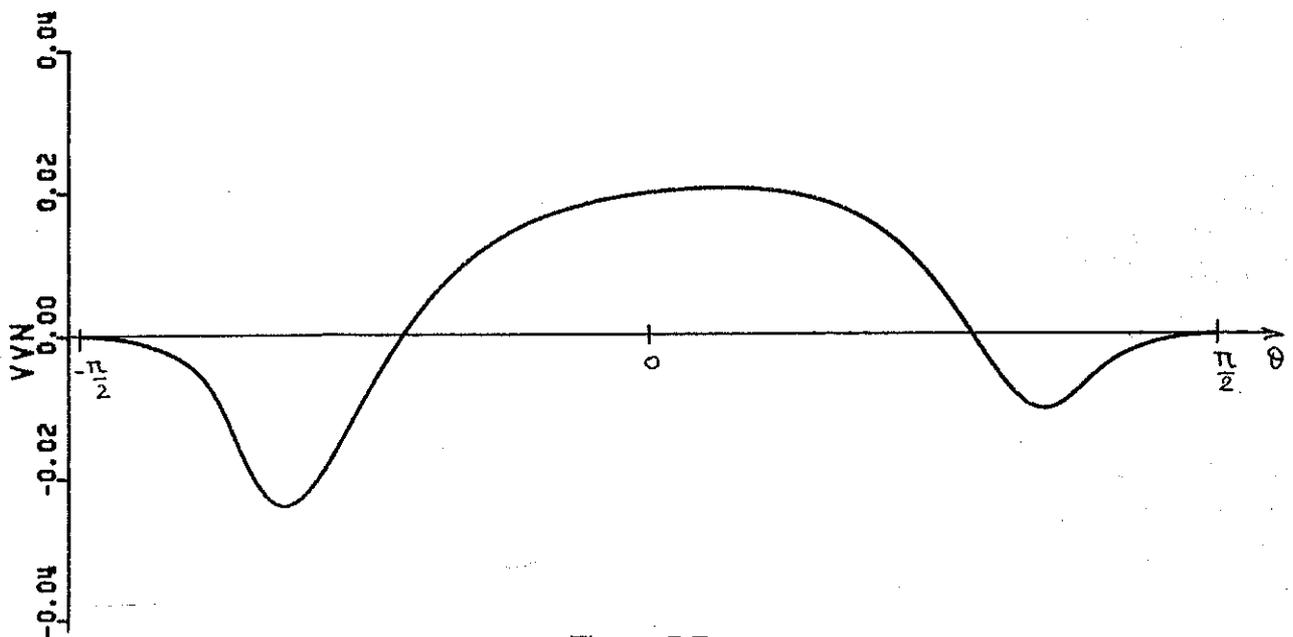


Figure 5.7

On peut constater que la courbe représentant l'intégrand est assez régulière, puisqu'elle ne présente que 3 extremums sur l'intervalle. Un nombre de points d'intégration de $2N = 50$ permet d'obtenir une erreur absolue inférieure à 10^{-4} sur le résultat de l'intégrale.

Sur la figure 5.8, nous avons indiqué les valeurs de la résistance de vagues en Newtons, calculés par les différentes méthodes, ainsi que les points expérimentaux obtenus par C.Farell. Le corps n'étant pas mince, l'intégration des pressions a été effectuée en utilisant les formules au second ordre (5.74) sur la carène fixe, sans intégrale de ligne puisque le corps est entièrement immergé.

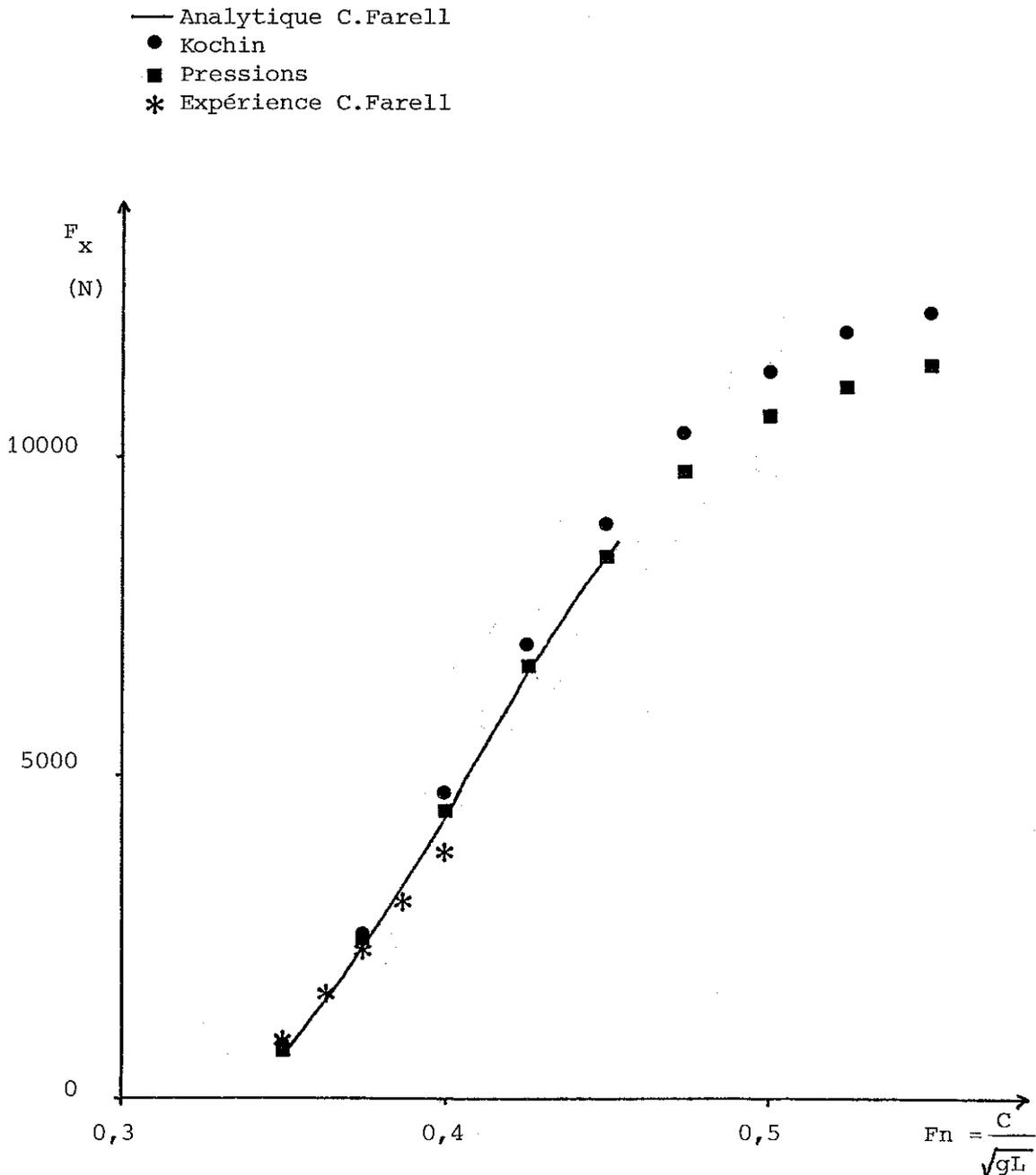


Figure 5.8

On peut remarquer que les résultats numériques issus de méthodes très différentes sont relativement voisins. L'écart maximum constaté entre les deux méthodes de calcul de la résistance de vagues est inférieur à 7 %, ce qui représente une précision convenable pour la discrétisation considérée.

L'intégration des pressions sur la carène donne des résultats pratiquement identiques à ceux de C.Farell, obtenus par application du théorème de Lagally.

Dans la gamme de vitesses pour laquelle on dispose de valeurs expérimentales, on constate un bon accord avec les calculs.

De tous ces résultats, il ressort que la solution obtenue pour le problème de Neumann-Kelvin donne une bonne estimation de la résistance de vagues. On peut donc penser que ce problème est bien représentatif de la réalité physique pour ce type de corps, la convergence des résultats obtenus par différentes méthodes numériques semblant indiquer que le problème est bien posé et suffisamment bien résolu.

5.8.2. Carène de Wigley :

Le test suivant concerne une carène mince coupant la surface libre, la carène de Wigley, qui a fait l'objet de nombreuses études tant sur le plan théorique qu'expérimental [29] [38] [103] et a été choisie pour tester les méthodes de détermination de la résistance de vagues lors des Workshops du D.T.N.S.R.D.C. [100] [101] [102].

Il s'agit d'une carène amphidrome définie par les équations :

$$y = \pm \frac{B}{2} \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{T^2}\right) \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$
$$0 \leq z \leq T$$

avec B = 8 m largeur
 L = 80 m longueur
 T = 5 m tirant d'eau

Le découpage de la carène (discrétisée en 132 facettes sur la moitié) est représenté ci-dessous :

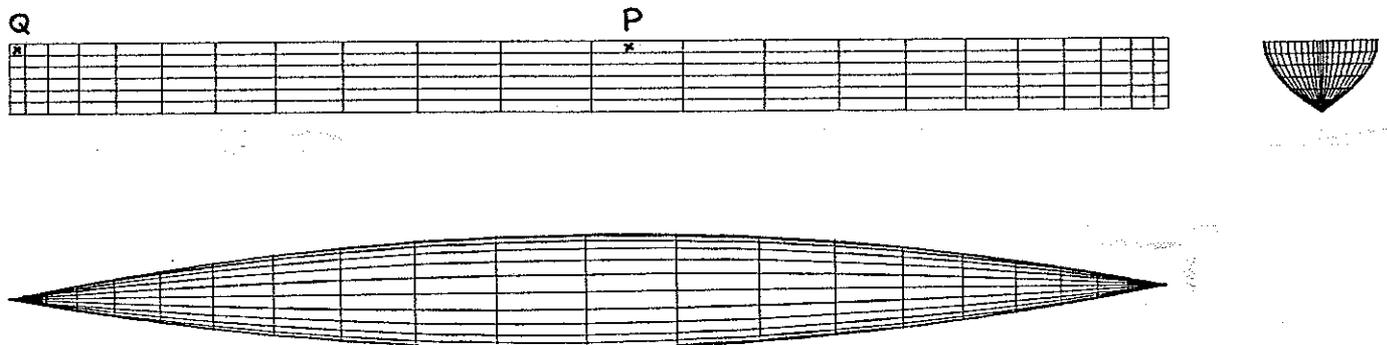


Figure 5.9

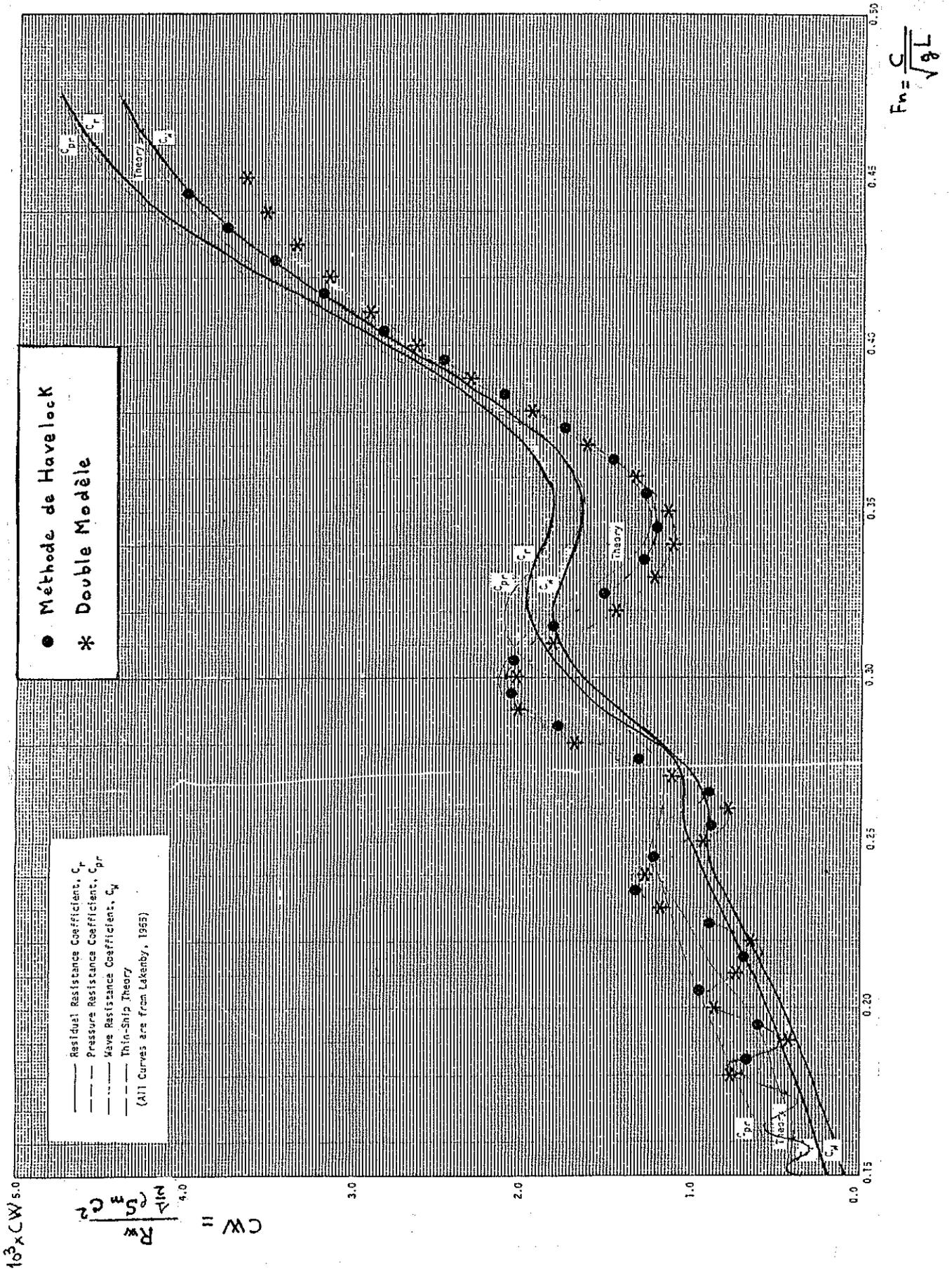


Figure 5.10

. Méthodes approchées :

Les calculs sur cette carène ont été réalisés avec deux approximations : la méthode du bateau mince de Havelock et la méthode du double modèle, l'approximation du nombre de Froude infini ne pouvant être raisonnablement envisagée qu'à des vitesses beaucoup plus élevées ($F_n \gg 1$).

Pour ces deux calculs, la carène a été discrétisée en 132 facettes sur la moitié, de la façon indiquée sur le schéma précédent, et la résistance de vagues a été calculée à l'aide des fonctions de Kochin, en tenant compte de l'intégrale de ligne pour l'approximation du double modèle. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.10.

Ces résultats appellent plusieurs commentaires. Tout d'abord, la courbe que nous obtenons par la méthode de Havelock est légèrement différente de celle de Lakenby. Les écarts, relativement faibles, que l'on observe aux nombres de Froude supérieurs à 0,26 peuvent s'expliquer par le fait que nous avons utilisé une formule discrétisée ne faisant pas appel à l'équation de la carène. Par contre, à des nombres de Froude inférieurs à 0,26, les courbes de Lakenby n'oscillent pas, mais présentent un comportement irrégulier, ce qui semble indiquer que l'intégration numérique n'a pas été effectuée avec assez de points d'intégration. Nos résultats sont d'ailleurs confirmés par d'autres auteurs [100], ainsi que par des formulations analytiques tenant compte de l'équation de la carène [7]. Les résultats obtenus par la méthode du double modèle sont très voisins de ceux de la méthode de Havelock, seul un léger déphasage apparaît aux extremums de la courbe, sans changer l'ordre de grandeur du résultat, l'influence de l'intégrale de ligne est par ailleurs très faible dans le cas d'une carène mince comme celle-ci.

La comparaison avec les résultats expérimentaux est plus préoccupante. En effet, la courbe expérimentale ne présente pas d'oscillations aux faibles nombres de Froude ($< 0,25$) et la forme de la courbe dans la plage de vitesses la plus intéressante en pratique ($0,25 \leq F_n \leq 0,4$) est très différente de celle calculée, les maximums et les minimums ont des amplitudes différentes et surtout n'ont pas lieu aux mêmes vitesses. Comme la localisation des minimums est très importante pour déterminer le point de fonctionnement optimal d'une carène, on doit conclure que les théories approchées utilisées ne sont pas suffisantes pour les besoins de la pratique et que l'on doit rechercher une méthode de calcul donnant des résultats plus réalistes. Ceci explique les espoirs mis dans le modèle de Neumann-Kelvin, ainsi que les efforts consentis pour essayer de le résoudre.

. Le problème numérique du modèle de Neumann-Kelvin :

Le problème de Neumann-Kelvin ayant été résolu d'une façon satisfaisante dans le cas d'une carène entièrement immergée, nous allons reprendre les formules utilisées en ajoutant les termes nécessaires pour tenir compte du fait que la carène perce la surface libre (intégrale de ligne).

Comme dans le cas précédent, nous allons d'abord examiner l'allure des intégrands des coefficients d'influence, ainsi que les résultats de l'intégrale. A titre d'exemple, nous avons choisi de considérer l'influence d'une facette située à la

flottaison au milieu de la carène (repérée par le point P sur le schéma de la carène) sur elle-même. Sur les trois figures suivantes nous présentons la courbe des intégrands tracés avec respectivement 100 points, 200 points et 800 points sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ pour $F_n = 0,2$.

Sur la dernière figure, nous avons tracé l'allure de l'intégrand pour un point influencé situé à la surface libre à l'arrière de la carène (influence de la facette P sur le point Q) et $F_n = 0,3$.

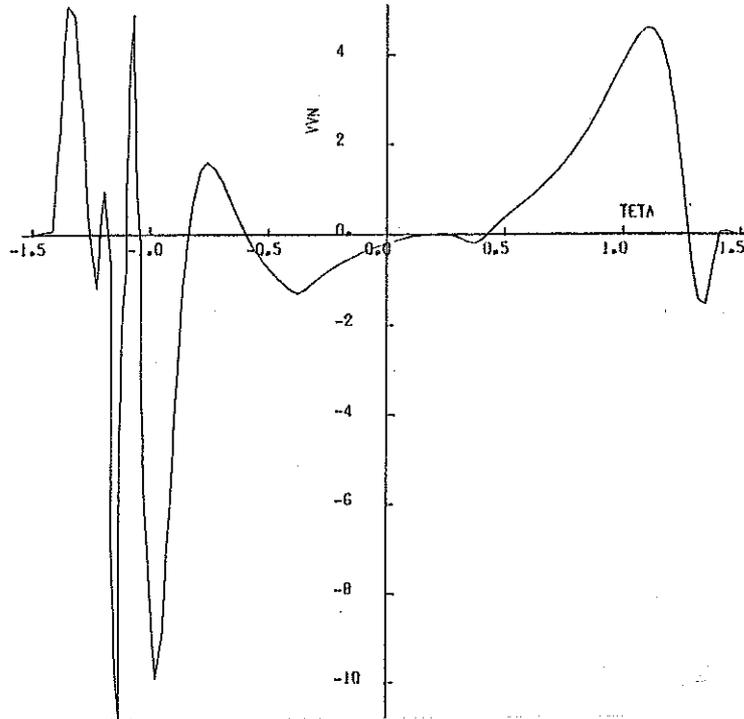


Figure 5.11

$F_n = 0,2$

, $N_\theta = 100$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) d\theta = 0,030$$

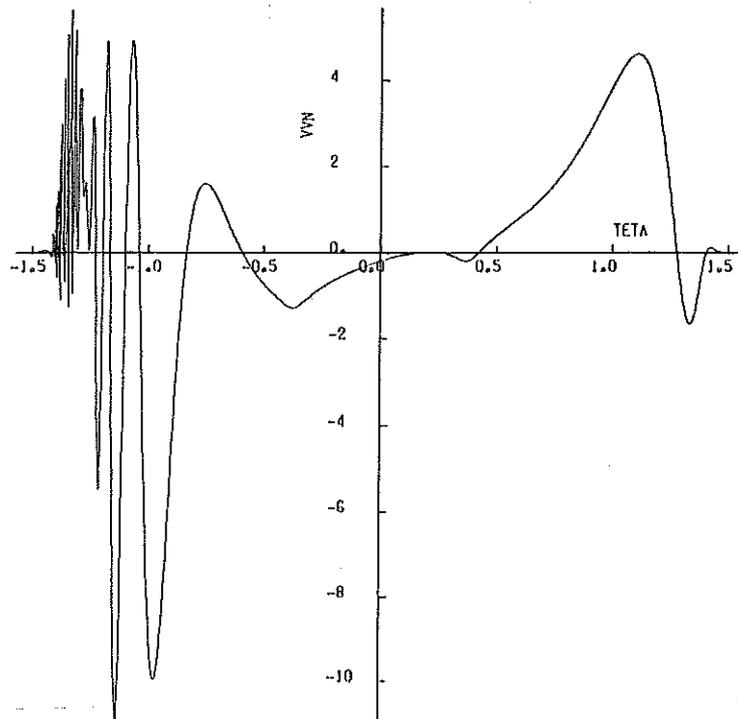


Figure 5.12

$F_n = 0,2$

, $N_\theta = 200$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) d\theta = 0,032$$

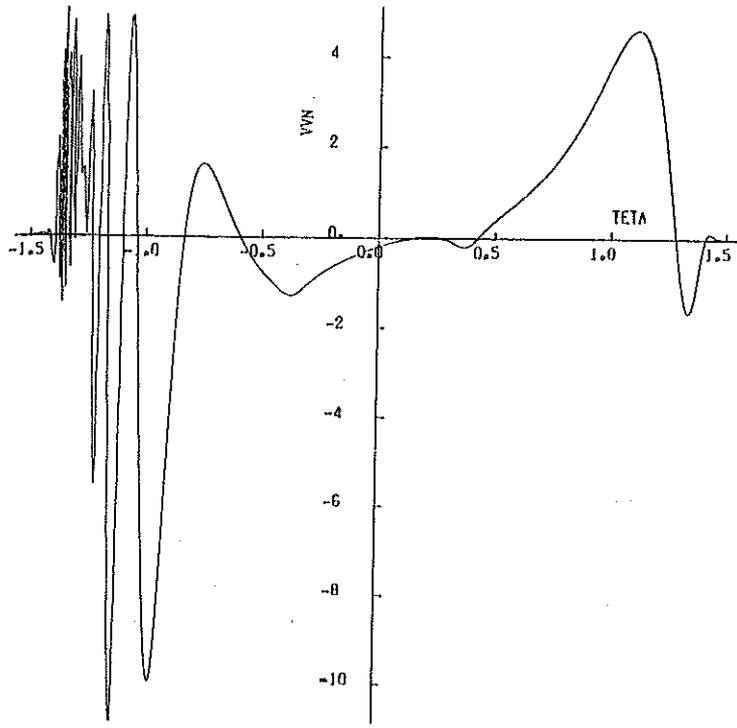


Figure 5.13

$$F_n = 0,2$$

,

$$N_\theta = 800$$

,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) d\theta = 0,024$$

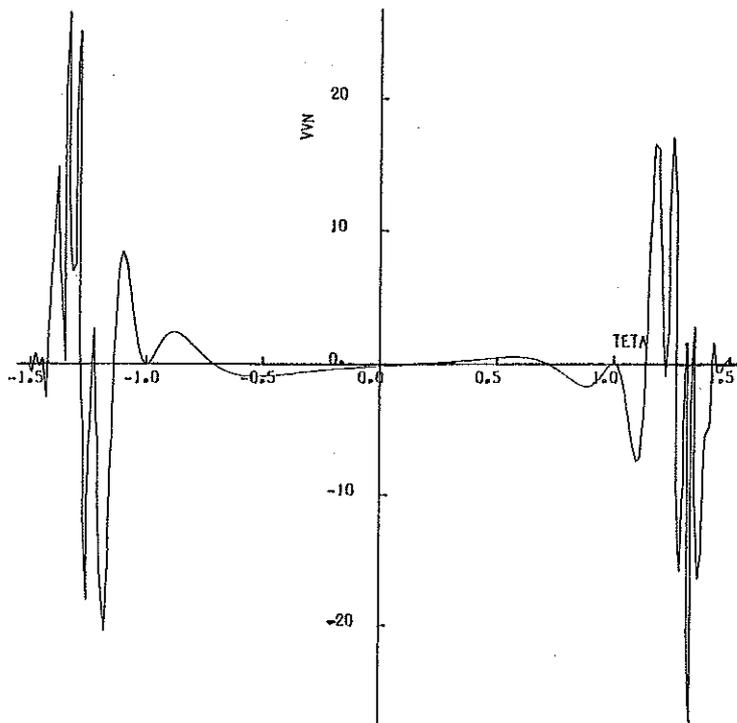


Figure 5.14

$$F_n = 0,3$$

,

$$N_\theta = 200$$

,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta) d\theta = 0,017$$

La comparaison des trois premières courbes montre l'apparition de nouvelles oscillations lorsqu'on augmente le nombre de points d'intégration. Les résultats de l'intégrale n'ont pas encore convergé avec 800 points. On peut d'ailleurs remarquer que la valeur finale est très faible, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-2}$ et obtenue par intégration d'une courbe oscillant entre -10 et +5. Un nombre de points minimum de l'ordre de 2000 semble nécessaire pour espérer avoir une erreur absolue de l'ordre de 10^{-3} . Il n'est d'ailleurs pas certain que l'intégrand présenté soit le plus oscillant de tous ceux de la carène (qui sont au nombre de $132 \times 132 = 17\,424$ dans le cas présent). Ceci peut être vérifié sur la quatrième courbe, puisque dans ce cas les oscillations se produisent à la fois vers $-\pi/2$ et vers $\pi/2$, pouvant atteindre des valeurs de ± 20 , alors qu'avec un nombre de Froude de 0,3 on est a priori dans un cas de calcul plus favorable (la période des oscillations est plus grande pour un même θ).

On peut essayer de poursuivre le calcul avec un nombre de points d'intégration de l'ordre de 800, mais dans ce cas, les valeurs des singularités obtenues après résolution du système linéaire sont aberrantes (supérieures à 10^2 dans certains cas) et la résistance de vagues correspondante peut être négative, alors que le temps de calcul sur un ordinateur moyen (Vax 750) est de l'ordre de plusieurs dizaines d'heures par nombre de Froude.

La formulation utilisée dans ces calculs a été comparée à celle obtenue par une méthode différente pour un mât cylindrique perçant la surface libre [45]. Les résultats numériques issus des deux formulations sont pratiquement identiques dans le cas du mât cylindrique.

Il semble donc que la précision nécessaire pour obtenir les coefficients d'influence du problème de Neumann-Kelvin ne puisse être obtenue avec la formulation et les méthodes numériques utilisées, ainsi que le montre la dispersion importante des résultats obtenus par Chang, Suzuki, Tsutsumi pour la carène de Wigley lors du Workshop de Washington en 1979 [100].

5.9. CONCLUSION :

Pour les carènes immergées, le modèle de Neumann-Kelvin donne de bons résultats, les temps de calcul étant raisonnables et la comparaison avec les résultats expérimentaux satisfaisante.

Il n'en est pas de même pour des carènes coupant la surface libre, principalement à cause de la difficulté numérique présentée par le calcul de l'intégrale des coefficients d'influence. Les modèles simplifiés de Havelock et du double modèle peuvent être utilisés avec un temps de calcul raisonnable, mais l'accord avec l'expérience n'est pas suffisant pour les besoins pratiques. Il faut donc envisager les différentes solutions possibles pour obtenir la résistance de vagues avec une précision suffisante.

Une première approche consiste à essayer de calculer numériquement les termes oscillants des intégrales à l'aide d'un ensemble de formules approchées valable chacune dans un domaine limité. Cette méthode, qui nécessite une étude préalable longue et délicate, a été mise en oeuvre par F.Noblesse en 1983 [9]. Les résultats obtenus s'approchent des expériences et les extremums des courbes aux nombres de Froude moyens sont bien localisés. Les oscillations subsistent cependant aux faibles

nombres de Froude.

Une autre méthode consiste à changer complètement la formulation du problème, comme dans la méthode de Guilloton ou dans la méthode des singularités de Rankine.

La méthode de Guilloton est une méthode particulière de calcul de la résistance de vagues qui utilise la solution du potentiel du Michell [89] pour des carènes élémentaires, les coins [59] [60] [61]. La transformation de Guilloton [62] [63] permet alors de définir une carène pour laquelle des conditions aux limites sont mieux satisfaites. Le processus itératif à mettre en oeuvre ainsi que les résultats pour la carène de Wigley sont décrits dans les références [20] [21] [51] [52]. Cette méthode donne d'excellents résultats pour des carènes minces, le seul inconvénient pratique étant l'impossibilité de prendre en compte des modifications de forme telles que l'adjonction d'un bulbe ou la présence d'un tableau arrière.

La mise en oeuvre de la méthode des singularités de Rankine fera l'objet du chapitre suivant .

Chapitre 6 : RESOLUTION DU PROBLEME DE LA RESISTANCE DE VAGUES PAR UNE METHODE DE SINGULARITES DE RANKINE

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons présenter la mise en oeuvre d'une méthode de singularités de Rankine en nous limitant aux deux carènes étudiées dans le chapitre précédent, l'ellipsoïde immergé et la carène de Wigley.

L'application de la méthode pour des carènes usuelles a été réalisée par J.J.Maisonneuve [86] [24], des développements permettant de traiter des problèmes particuliers, tels que les effets de fond [25], de portance [26], de coussin d'air, ainsi que l'étude des non-linéarités de la condition de surface libre sont en cours de réalisation et feront l'objet de publications ultérieures.

Après avoir posé le problème dans le repère lié à la carène, on étudie différentes simplifications possibles de la condition de surface libre, conduisant aux modèles de Neumann-Kelvin, Dawson et Dawson modifié. Les équations intégrales des problèmes aux limites correspondants sont écrites sur la carène et sur la partie maillée de la surface libre, les conditions de surface libre étant satisfaites le long des lignes de courant du double modèle par un schéma de différences finies décentré amont. Les efforts sur la carène sont calculés par intégration des pressions au premier ordre, puis après détermination de la position dynamique de la carène, au second ordre. On décrit ensuite les différentes étapes nécessaires à la résolution numérique du problème discrétisé, ainsi que l'organisation informatique des codes de calcul scalaire et vectoriel réalisés.

Après avoir décrit les principaux tests numériques du schéma de différences finies, les résultats obtenus pour l'ellipsoïde immergé et la carène de Wigley sont comparés à ceux d'autres théories et aux expériences.

6.1. POSITION DU PROBLEME :

Le problème de la résistance de vagues a été posé au paragraphe 5.1. Pour résoudre ce problème, pour une carène avançant à vitesse constante $\vec{C} = C \cdot \vec{i}_x$, à l'aide d'une méthode de singularités de Rankine, nous allons formuler le problème dans le repère relatif lié à la carène.

Le problème de la résistance de vagues revient à trouver un potentiel absolu ϕ qui, exprimé dans le repère relatif, est solution du problème aux limites suivant :

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \quad \text{dans } D^- \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{g}{C^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{C} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{1}{2C^2} \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} V^2 \Big|_{z=\zeta(x,y)} = 0 \\ \zeta = \left(\frac{C}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{V^2}{2g} \right) \Big|_{z=\zeta(x,y)} \\ \phi \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini} \\ \text{Condition de radiation} \end{array} \right.$$

La condition de radiation remplace ici la viscosité évanescence ϵ' . Elle pourra être introduite si la solution obtenue n'est pas conforme à la réalité physique.

Les vitesses absolues, exprimées dans le repère relatif sont données par :

$$(6.2) \quad \vec{V} = \vec{\text{grad}} \phi$$

et la vitesse relative est définie par :

$$(6.3) \quad \vec{V}_R = \vec{V} - C \cdot \vec{i}_x$$

Cette vitesse dérive d'un potentiel scalaire Φ qui est le potentiel relatif de l'écoulement :

$$(6.4) \quad \Phi = \phi - C x$$

Pour alléger l'écriture des équations, dans la suite de ce chapitre, les dérivations seront exprimées en notation indicielle. On écrira, par exemple :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \phi_{xy}$$

6.1.1. Ligne de courant :

L'écoulement dans le repère relatif est permanent, les lignes de courant y sont définies par :

$$(6.5) \quad \frac{dx}{\Phi_x} = \frac{dy}{\Phi_y} = \frac{dz}{\Phi_z} = \frac{dl}{\Phi_1}$$

avec

$$(6.6) \quad \Phi_1^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2$$

l étant l'abscisse curviligne le long d'une ligne de courant.

6.1.2. Condition de pression :

Cette condition s'écrit :

$$(6.7) \quad \zeta = \left(\frac{C}{g} \phi_x - \frac{V^2}{2g} \right) \Big|_{z=\zeta(x,y)}$$

et en introduisant le potentiel relatif Φ , on obtient :

$$(6.8) \quad \zeta = \frac{1}{2g} [C^2 - (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)] \Big|_{z=\zeta(x,y)}$$

6.1.3. Condition cinématique :

Cette condition s'écrit :

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^2 \phi_{xx} + g \phi_z - C \frac{\partial}{\partial x} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \\ \frac{1}{2} (\phi_x \vec{i}_x + \phi_y \vec{i}_y + \phi_z \vec{i}_z) \cdot \vec{\text{grad}}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) \Big|_{z=\zeta(x,y)} = 0 \end{array} \right.$$

et en introduisant les vitesses relatives :

$$\begin{aligned} & C^2 \Phi_{xx} + g \Phi_z - 2C [(\Phi_x + C) \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{yx} + \Phi_z \Phi_{zx}] + \\ & (\Phi_x + C) [(\Phi_x + C) \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{yx} + \Phi_z \Phi_{zx}] + \Phi_y [(\Phi_x + C) \Phi_{yx} + \Phi_y \Phi_{yy} + \Phi_z \Phi_{yz}] + \\ & \Phi_z [(\Phi_x + C) \Phi_{zx} + \Phi_y \Phi_{zy} + \Phi_z \Phi_{zz}] \Big|_{z=\zeta(x,y)} = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$(6.10) \quad \Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + \Phi_z^2 \Phi_{zz} + 2(\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_x \Phi_z \Phi_{xz} + \Phi_y \Phi_z \Phi_{yz}) + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

qui peut s'écrire :

$$(6.11) \quad \frac{1}{2} [\Phi_x(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)_x + \Phi_y(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)_y + \Phi_z(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)_z] + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

Pour une fonction quelconque F(x,y,z), on a :

$$(6.12) \quad dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Le long d'une ligne de courant, en exprimant dx, dy, dz en fonction de dl, il vient :

$$(6.13) \quad \Phi_1 F_1 = \Phi_x F_x + \Phi_y F_y + \Phi_z F_z$$

d'où :

$$(6.14) \quad \frac{1}{2} \Phi_1 (\Phi_1^2)_1 + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

ou bien :

$$(6.15) \quad \Phi_1^2 \Phi_{11} + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

La condition de surface libre ci-dessus étant écrite le long d'une ligne de courant, dans le repère relatif.

6.1.4. Conditions de surface libre exactes :

Les conditions de surface libre exactes s'écrivent donc :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \Phi_1^2 \Phi_{11} + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0 \\ \zeta = \frac{1}{2g} (C^2 - \Phi_1^2) |_{z=\zeta(x,y)} \end{cases}$$

Ces expressions peuvent être obtenues directement par les considérations suivantes :

On écrit que la vitesse à la verticale du point de coordonnées (x,y,0) est tangente à la surface libre d'équation $z = \zeta(x,y)$ d'où :

$$(6.17) \quad \frac{dz}{dt} = w = \Phi_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \zeta$$

et comme la surface libre est immobile en repère relatif :

$$(6.18) \quad \Phi_z = \Phi_x \zeta_x + \Phi_y \zeta_y$$

et compte tenu de la condition de pression :

$$(6.19) \quad \zeta = \frac{1}{2g} (C^2 - V^2) |_{z=\zeta(x,y)}$$

On obtient :

$$(6.20) \quad \frac{1}{2} [\Phi_x (V^2)_x + \Phi_y (V^2)_y] + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

La vitesse \vec{V} n'étant ici fonction que de x et y, on a :

$$(6.21) \quad \Phi_1 (V^2)_1 = \Phi_x (V^2)_x + \Phi_y (V^2)_y$$

d'où finalement :

$$(6.22) \quad \Phi_1^2 \Phi_{11} + g \Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

6.2. CONDITIONS DE SURFACE LIBRE APPROCHEES :

Les conditions de surface libre écrites précédemment sont trop complexes pour être traitées directement. Le principe général retenu pour simplifier ces conditions sera de faire des hypothèses sur le comportement des solutions. Nous reprendrons les développements de T. Kitazawa [74], on supposera donc :

- que la hauteur de vagues est petite : $\zeta = O(\epsilon)$
- que le potentiel relatif ϕ peut être décomposé en deux parties :

$$(6.23) \quad \Phi = \Phi_r + \Phi_w$$

Φ_r étant le potentiel de perturbation du double modèle ($C = 0$)

Φ_w étant un potentiel complémentaire d'ordre supérieur à Φ_r . Si $\Phi_r = O(\epsilon)$,

$$\Phi_w = O(\epsilon^2)$$

- que les lignes de courant sur la surface libre exacte sont voisines de celles obtenues par projection dans le plan $z = 0$.
- que les dérivations ne modifient pas les ordres de grandeur.

La condition de pression s'écrit alors :

$$(6.24) \quad \zeta = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_1^2] |_{z=\zeta(x,y)} = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_1^2] |_{z=0} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} [C^2 - \Phi_1^2] |_{z=0}$$

Le terme principal de ce développement est donc :

$$(6.25) \quad \zeta = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_1^2] |_{z=0}$$

Ce terme peut d'ailleurs être encore simplifié, puisqu'en développant Φ_1^2 en :

$$\Phi_1^2 = (\phi_x - C)^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2$$

et il reste au premier ordre :

$$(6.26) \quad \zeta = -\frac{C}{g} \phi_x |_{z=0}$$

On peut remarquer que si les hypothèses concernant le comportement des potentiels sont bien satisfaites, les deux formules (6.25) et (6.26) sont équivalentes.

On écrira de même pour la condition cinématique :

$$(6.27) \quad (\Phi_{rl} + \Phi_{wl}) (\Phi_{rl}^2 + 2\Phi_{rl}\Phi_{wl} + \Phi_{wl}^2) + g(\Phi_{wz} + \Phi_{rz}) |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

Soit en négligeant comme C.W.Dawson [18] et E.Baba [3] les termes quadratiques en Φ_w :

$$(6.28) \quad \Phi_{ll}\Phi_{rl}^2 + 2\Phi_{rl}\Phi_{rl}\Phi_{wl} + g\Phi_z |_{z=\zeta(x,y)} = 0$$

Les lignes de courant étant calculées autour du double modèle.

Et, en développant en série de Taylor autour de $z = 0$:

$$F |_{z=\zeta} = F |_{z=0} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} F |_{z=0}$$

après avoir remarqué que sur $z = 0$:

$$(6.29) \quad \Phi_{rz} = 0, \quad \Phi_{rlz} = 0, \quad \Phi_{rllz} = 0$$

il vient pour les termes principaux :

$$(6.30) \quad \Phi_{ll}\Phi_{rl}^2 + 2\Phi_{rl}\Phi_{rl}\Phi_{wl} + g\Phi_z |_{z=0} + \zeta g\Phi_{rzz} |_{z=0} = 0$$

ou bien :

$$(6.31) \quad \Phi_{ll}\Phi_{rl}^2 + 2\Phi_{rl}\Phi_{rl}\Phi_{wl} + g\Phi_z |_{z=0} + g\Phi_{rz} |_{z=\zeta} = 0$$

6.2.1. Hypothèse de Nakatake :

D'après E.Baba [3], Nakatake suppose :

$$(6.32) \quad \zeta = \zeta_r + \zeta_w$$

avec

$$(6.33) \quad \zeta_r = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_{rl}^2] |_{z=0} \quad \text{et} \quad \zeta_w \ll \zeta_r$$

La condition cinématique s'écrit alors :

$$(6.34) \quad \Phi_{ll} \Phi_{rl}^2 + 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl} \Phi_{wl} + g \Phi_z |_{z=0} + g \zeta_r \Phi_{rzz} |_{z=0} = 0$$

ou bien :

$$(6.35) \quad \Phi_{ll} \Phi_{rl}^2 + 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl} \Phi_{wl} + g \Phi_z |_{z=0} + g \Phi_{rz} |_{z=\zeta_r} = 0$$

6.2.2. Hypothèse de Dawson :

C.W.Dawson écrit la condition (6.28) directement en $z = 0$ [18], il vient alors :

$$(6.36) \quad \Phi_{ll} \Phi_{rl}^2 + 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl} \Phi_{wl} + g \Phi_z |_{z=0} = 0$$

qui peut être transformée, compte tenu de :

$$\Phi_{wl} = \Phi_l - \Phi_{rl}$$

On obtient :

$$(6.37) \quad \Phi_{ll} \Phi_{rl}^2 + 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl} \Phi_l + g \Phi_z |_{z=0} = 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl}^2 |_{z=0}$$

soit :

$$(6.38) \quad (\Phi_{rl}^2 \Phi_l) |_{z=0} + g \Phi_z |_{z=0} = 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl}^2 |_{z=0}$$

Les lignes de courant étant comme précédemment calculées autour du double modèle.

La condition de pression s'écrivant :

$$(6.39) \quad \zeta = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_l^2] |_{z=0}$$

ou bien :

$$(6.40) \quad \zeta = \frac{1}{2g} [C^2 - \Phi_{rl}^2 - 2 \Phi_{rl} \Phi_{wl}] |_{z=0}$$

6.2.3. Problème de Neumann-Kelvin :

Si dans les équations précédentes, on suppose que la carène est mince, on a :

$$(6.41) \quad \frac{\partial}{\partial l} \approx \frac{\partial}{\partial x} |_{z=0} \quad , \quad \Phi_{rl} |_{z=0} \approx -C \quad , \quad \Phi_{rll} |_{z=0} \approx 0$$

En reportant ces approximations dans (6.35), il vient :

$$(6.42) \quad C^2 \Phi_{xx} + g \Phi_z |_{z=0} = 0$$

et l'on retrouve la condition de surface libre de Neumann-Kelvin pour le potentiel relatif. Pour le potentiel absolu exprimé dans le repère relatif, on a :

$$\phi = \Phi + C x$$

donc :

$$(6.43) \quad C^2 \phi_{xx} + g \phi_z |_{z=0} = 0$$

et

$$(6.44) \quad \zeta = \frac{C}{g} \phi_x |_{z=0}$$

Dans le cas d'une carène coupant la surface libre, le problème de Neumann-Kelvin apparait alors comme la limite du potentiel du double modèle perturbé défini par (6.23) lorsque la carène est infiniment mince.

Pour une carène entièrement immergée, la condition de surface libre de Neumann-Kelvin suppose seulement que les lignes de courant et les vitesses dans le plan de la surface libre sont peu perturbées et l'on conçoit que cette hypothèse est moins restrictive que la précédente, ce qui peut expliquer les bons résultats obtenus dans ce cas à l'aide du modèle de Neumann-Kelvin, comme on a pu le voir au chapitre précédent.

Les développements réalisés sont consistants au sens mathématique. On ne doit cependant pas oublier que le problème à résoudre est un problème physique et que certains termes d'ordre supérieur peuvent être plus importants que les termes retenus, dont certains peuvent être négligeables. Le seul critère de validité des hypothèses reste la confrontation avec l'expérience.

6.3. EQUATIONS INTEGRALES :

6.3.1. Le problème aux limites :

Pour résoudre le problème de la résistance de vagues par une méthode de singularités de Rankine, il est nécessaire de mailler toutes les limitantes du domaine fluide. Celui-ci s'étendant jusqu'à l'infini, on utilisera une méthode mixte où l'on maille seulement une partie du domaine, le comportement à l'extérieur étant obtenu par une fonction de Green simplifiée. La surface libre SL sera donc divisée en deux parties : une partie maillée SL_m où la condition de surface complète devra être vérifiée et une partie complémentaire \overline{SL} où l'on vérifiera une condition de surface libre simplifiée à l'aide de fonctions de Green. Le problème aux limites posé pour le potentiel de perturbation ϕ (potentiel absolu exprimé dans le repère relatif) est le suivant :

$$(6.45) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{dans } z < 0 \\ E \phi |_{z=0} = 0 & \text{sur } SL_m \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} |_{z=0} = 0 & \text{sur } \overline{SL} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} |_{\Sigma} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_{\Sigma} & \text{Condition de glissement sur la carène} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Condition de surface libre} \end{array} \right.$$

La condition de surface libre $E \phi |_{z=0}$ sera l'une des conditions approchées définies au paragraphe précédent.

La condition $\partial \phi / \partial z |_{z=0}$ écrite sur le domaine complémentaire sera choisie a priori pour sa simplicité. Le fait de prendre en compte une condition de surface libre plus compliquée sur \overline{SL} augmenterait considérablement les difficultés de mise en oeuvre de la méthode et ne sera donc pas envisagée.

6.3.2. Etablissement des équations intégrales :

Nous considérerons une distribution de sources réparties sur le carène Σ et la surface libre maillée SL_m .

Les équations intégrales seront établies à partir de la troisième formule de Green. On a :

$$(6.46) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left(\frac{\phi_e + \phi_i}{2} \right) = - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma + SL_m} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} K(M, M') \, dS(M')$$

\vec{n} étant la normale intérieure au fluide.

avec:

(6.47) $K(M, M') = \frac{1}{MM'} + k(M, M')$: fonction de Green du problème

Sur la carène, on a :

$$\sigma(M) = \frac{\partial \phi_e}{\partial n_M} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_M} = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_M}$$

d'où

(6.48) $\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{\phi_e + \phi_i}{2} \right) = -\frac{\sigma(M)}{2} + C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M$

Sur la surface libre maillée :

$$\sigma(M) = \frac{\partial \phi_e}{\partial n_M} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n_M} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial z} |_M + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} |_M, \quad Oz \text{ étant la verticale ascendante}$$

$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} |_M$ est donné par la condition de surface libre.

On a donc :

(6.49) $\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{\phi_e + \phi_i}{2} \right) = -\frac{\sigma(M)}{2} - \frac{\partial \phi_e}{\partial z} |_M$

Sur la surface libre complémentaire \bar{SL} :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} |_{M \in \bar{SL}} = 0 = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma + SL_m} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial z_M} K(M, M') dS(M')$$

La fonction $K(M, M')$ définie par :

(6.50)
$$\begin{cases} K(M, M') = \frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} & \text{pour } M' \in \Sigma \quad M'(x', y', z'), M'_1(x', y', -z') \\ K(M, M') = \frac{1}{MM'} & \text{pour } M' \in SL_m \end{cases}$$

vérifie la condition ci-dessus et $K(M, M')$ est une fonction de Green simple du problème posé, le terme en $1/MM'_1$ étant aussi un terme de Rankine.

Si l'on tient compte du fait que sur la surface libre $\frac{\partial}{\partial z_M} K(M, M') = 0$, les équations intégrales du problème de la résistance de vagues pour une distribution de singularités de Rankine s'écrivent :

$$(6.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma+SL_m} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} K(M,M') dS(M') = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M \quad M \in \Sigma \\ \frac{\sigma(M)}{2} = - \frac{\partial \phi_e}{\partial z} |_M \quad M \in SL_m \end{array} \right.$$

$$(6.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(M,M') = \frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \quad \text{pour } M' \in \Sigma \\ K(M,M') = \frac{1}{MM'} \quad \text{pour } M' \in SL_m \end{array} \right.$$

L'équation intégrale correspondant au double modèle en milieu infini, s'écrivant :

$$(6.53) \quad \frac{\sigma(M)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} K(M,M') dS(M') = C \cdot \vec{n} \cdot \vec{i}_x |_M \quad M \in \Sigma$$

avec :

$$(6.54) \quad K(M,M') = \frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \quad \text{pour } M' \in \Sigma$$

6.3.3. Schéma de différences finies :

Compte tenu des conditions de surface libre envisagées au paragraphe 6.2., le terme $\partial \phi_e / \partial z$ s'exprime en fonction de la dérivée de la vitesse calculée sur la surface libre. Cette dérivation sera effectuée numériquement, suivant la technique proposée par C.W.Dawson [18], en utilisant un schéma de différences finies, décentré amont, d'ordre K. on aura donc :

$$(6.55) \quad F_{i_1} = \sum_{k=0}^{K-1} e_k F_{i-k}$$

F_{i_1} représentant la dérivée de F par rapport à l en i, F_{i-k} les valeurs de la fonction F aux points situés en amont de i, e_k étant les coefficients de l'opérateur.

Le principe de calcul des coefficients e_k est décrit dans l'annexe 7.

6.4. CALCUL DES EFFORTS :

Avec cette méthode, les vitesses sont connues sur la carène et sur la surface libre, il est donc naturel de calculer les efforts par intégration des pressions.

6.4.1. Calcul des efforts au premier ordre :

Les efforts du premier ordre sont donnés par :

$$(6.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 = - \iint_{\Sigma} p_1 \cdot \vec{n} \, dS = \rho \iint_{\Sigma} C \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{n} \, dS \\ \vec{M}_1 = - \iint_{\Sigma} p_1 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS = \rho \iint_{\Sigma} C \frac{\partial \phi}{\partial x} (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \end{array} \right.$$

P étant un point courant de la carène Σ et O le point de calcul des efforts.

6.4.2. Déplacements :

Les déplacements de la carène sont définis à partir des coefficients hydrostatiques donnés par :

$$(6.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{OG} = \frac{1}{M} \int_M \vec{OP} \, dm = X_G \vec{i}_x + Y_G \vec{i}_y + Z_G \vec{i}_z \\ \vec{OC} = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{OP} \, dV = X_C \vec{i}_x + Y_C \vec{i}_y + Z_C \vec{i}_z \\ \vec{OP} = X \vec{i}_x + Y \vec{i}_y + Z \vec{i}_z \\ S_{33} = \rho g \iint_{SF} dS = \rho g SF \\ S_{34} = S_{43} = \rho g \iint_{SF} Y \, dS \\ S_{35} = S_{53} = -\rho g \iint_{SF} X \, dS \\ S_{44} = \rho g \iint_{SF} Y^2 \, dS + \rho g V (Z_C - Z_G) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{45} = S_{54} = -\rho g \iint_{SF} XY \, dS \\ S_{55} = \rho g \iint_{SF} X^2 \, dS + \rho g V (Z_C - Z_G) \end{array} \right.$$

V étant le volume, SF la surface de flottaison, G le centre de gravité et C le centre de carène.

Les déplacements possibles sont l'enfoncement Z_E , la gîte θ_x et l'assiette θ_y . Ils sont déterminés par la résolution du système linéaire :

$$(6.58) \quad \begin{vmatrix} F_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_E \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} Z_E \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{vmatrix}$$

on aura donc :

$$(6.59) \quad \begin{vmatrix} Z_E \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{vmatrix} = S^{-1} \begin{vmatrix} F_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \end{vmatrix}$$

F_{1z} , M_{1x} et M_{1y} étant la force verticale et les moments de roulis et de tangage au premier ordre.

Cette formulation permet de tenir compte de la position du point de poussée et éventuellement de la force de frottement (donnée, par exemple, par la formule I.T.T.C. 57) dans la détermination des déplacements de la carène.

Une fois connus les déplacements de la carène, il est possible de calculer les efforts à un ordre supérieur.

6.4.3. Calcul des efforts au second ordre :

Les efforts du second ordre sont donnés d'après (1.100) et (1.101) par :

$$(6.60) \left\{ \begin{aligned} \vec{F}_2 &= \theta_y F_{1z} \vec{i}_x - \theta_x F_{1z} \vec{i}_y + (\theta_x F_{1y} - \theta_y F_{1x}) \vec{i}_z \\ &+ \rho \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 + Z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C \phi) \right] \vec{n} \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma} (\zeta_1 - Z_1)^2 \vec{n} \, dS \\ \vec{M}_2 &= \theta_y M_{1z} \vec{i}_x - \theta_x M_{1z} \vec{i}_y + (\theta_x M_{1y} - \theta_y M_{1x}) \vec{i}_z \\ &+ \rho \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi)^2 + Z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C \phi) \right] (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \\ &- \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma} (\zeta_1 - Z_1)^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \end{aligned} \right.$$

avec :

$$\vec{OP} = X \vec{i}_x + Y \vec{i}_y + Z \vec{i}_z$$

$$Z_1 = Z_E - \theta_y X + \theta_x Y$$

$$\zeta_1 = \frac{C}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Ces formules sont générales, mais d'un emploi peu aisé. On peut les utiliser en négligeant certains termes tels que $Z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C \phi)$. Si l'on itère sur la position de la carène, les déplacements s'annulent à l'équilibre et l'on a alors :

$$(6.61) \left\{ \begin{aligned} \vec{F}_2 &= \rho \iint_{\Sigma_d} \frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi_d)^2 \vec{n} \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_d} \zeta_{1d}^2 \vec{n} \, dS \\ \vec{M}_2 &= \rho \iint_{\Sigma_d} \frac{1}{2} (\vec{\text{grad}} \phi_d)^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS - \frac{\rho g}{2} \int_{\Gamma_d} \zeta_{1d}^2 (\vec{OP} \wedge \vec{n}) \, dS \end{aligned} \right.$$

Σ_d étant la carène déplacée et Γ_d le contour de la flottaison, ϕ_d le potentiel autour de la carène déplacée et $\zeta_{1d} = \frac{C}{g} \frac{\partial \phi_d}{\partial x}$. L'ensemble des efforts calculés au second ordre est donné par la somme des efforts du premier et du second ordre :

$$(6.62) \left\{ \begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \end{aligned} \right.$$

6.5. RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DISCRETISE :

6.5.1. Principe de la méthode de résolution :

D'après les paragraphes précédents, la résolution du problème se décompose en plusieurs étapes qui sont indiquées ci-dessous et explicitées dans les paragraphes suivants :

- Résolution du problème du double modèle (carène + symétrique par rapport à la surface libre en milieu illimité).
- Calcul des lignes de courant autour du double modèle dans le plan de la surface libre au repos.
- Maillage du plan de la surface libre au repos autour des lignes de courant du double modèle.
- Constitution et résolution des systèmes linéaires correspondant à la condition de surface libre choisie.
- Calcul des efforts et des déplacements de la carène.

6.5.2. Discrétisation de la carène :

Pour pouvoir itérer sur la position de la carène, il est nécessaire de connaître la forme du corps au dessus de la flottaison au repos. Le corps sera donc maillé au-dessus de la flottaison et les calculs seront réalisés avec l'intersection du corps discrétisé avec la surface libre, en tenant compte des déplacements éventuels (gîte, assiette et enfoncement) et en éliminant les facettes trop petites. Les facettes de la carène, en nombre NC, seront numérotées de 1 à NC.

6.5.3. Coefficients d'influence :

Les coefficients d'influence seront notés X_{ij} , Y_{ij} et Z_{ij} .

Ils seront définis différemment suivant que la facette influençante j appartient à la carène ou à la surface libre d'après les formules (6.52).

- Facette influençante s_j appartenant à la carène Σ : coefficients du double modèle :

On note :

$$(6.63) \quad a) \quad X_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \right) dS(M') = - \frac{1}{4\pi} (V_{s_x}^0 + V_{s_x}^1)$$

$$(6.63) \quad b) \quad Y_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \right) dS(M') = - \frac{1}{4\pi} (V_{s_y}^0 + V_{s_y}^1)$$

$$(6.63) \quad c) \quad Z_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_1} \right) dS(M') = - \frac{1}{4\pi} (V_{s_z}^0 + V_{s_z}^1)$$

Les expressions $V_{s_x}^0$, $V_{s_y}^0$, $V_{s_z}^0$ se calculent directement à partir des résultats du paragraphe II de l'annexe 6, les expressions $V_{s_x}^1$, $V_{s_y}^1$, $V_{s_z}^1$ se calculent en faisant les changements de variables suivants :

- Pour les formules asymptotiques :

$$(6.64) \quad \begin{cases} V_{s_x}^1 = \mathcal{A} \frac{x_G - x_i}{R_0(-z_G)} \\ V_{s_y}^1 = \mathcal{A} \frac{y_G - y_i}{R_0(-z_G)} \\ V_{s_z}^1 = \mathcal{A} \frac{-z_G - z_i}{R_0(-z_G)} \end{cases}$$

- Pour les formules exactes :

$$(6.65) \quad \begin{cases} V_{s_x}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_x} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{s_y}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_y} (-z'_k, -z'_{k+1}) \\ V_{s_z}^1 = - \sum_{k=1}^m S_{k_z} (-z'_k, -z'_{k+1}) \end{cases}$$

\mathcal{A} désignant l'aire de la facette j de centre de gravité $G(x_G, y_G, z_G)$ et de sommets $M'_k(x'_k, y'_k, z'_k)$.

- Facette influençante s_j appartenant à la surface libre SL :

$$(6.66) \quad \begin{cases} X_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{MM'} dS(M') = - \frac{1}{4\pi} V_{sx}^0 \\ Y_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{MM'} dS(M') = - \frac{1}{4\pi} V_{sy}^0 \\ Z_{ij} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{MM'} dS(M') = - \frac{1}{4\pi} V_{sz}^0 \end{cases}$$

V_{sx}^0 , V_{sy}^0 , V_{sz}^0 étant donnés par les formules du paragraphe II de l'annexe 6.

Ces coefficients d'influence seront calculés par blocs correspondant aux étapes du calcul. Dans le cas d'une carène symétrique, les densités de singularités sont les mêmes de part et d'autre du plan de symétrie. On calculera donc, en un point influencé de la partie décrite, le coefficient d'influence correspondant à la facette et son symétrique suivant la méthode indiquée au paragraphe 5.7.6.

6.5.4. Résolution du problème du double modèle :

Pour résoudre le problème du double modèle, on commence par calculer les coefficients d'influence correspondants .

En désignant par (p_i, q_i, r_i) les cosinus directeurs de la normale \vec{n}_{Mi} , et en adimensionnalisant par rapport à la vitesse incidente C ($\bar{\sigma}^o = \sigma^o/C$, $\bar{\Phi}^o = \Phi^o/C$), le système linéaire traduisant le problème du double modèle s'écrit :

$$(6.67) \quad \frac{\bar{\sigma}_i^o}{2} + \sum_{j=1}^{NC} (X_{ij} p_i + Y_{ij} q_i + Z_{ij} r_i) \bar{\sigma}_j^o = p_i$$

Ce système linéaire collocatif peut être résolu par une méthode directe où par une méthode itérative type Gauss-Seidel comme nous l'avons indiqué au paragraphe 5.7.4. Dans le cas présent, nous choisirons de le résoudre à l'aide d'une méthode directe, de la même façon que pour le système complet avec surface libre maillée.

6.5.5. Lignes de courant du double modèle, maillage de la surface libre :

Une fois connue la distribution de sources cinématiquement équivalente au double modèle, on peut calculer les vitesses relatives au point M_i , appartenant au plan de la surface libre au repos $z = 0$, à l'aide des formules :

$$(6.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Phi}_{Xi}^0 = \sum_{j=1}^{NC} \bar{\sigma}_j^0 X_{ij} - 1 \\ \bar{\Phi}_{Yi}^0 = \sum_{j=1}^{NC} \bar{\sigma}_j^0 Y_{ij} \end{array} \right.$$

Les lignes de courant du double modèle sont obtenues en résolvant l'équation différentielle :

$$(6.69) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\bar{\Phi}_{Yi}^0}{\bar{\Phi}_{Xi}^0} = f(x_i, y_i)$$

Cette résolution peut se faire à l'aide d'une méthode classique de résolution numérique d'équation différentielle, comme la méthode de Runge-Kutta ou celle d'Euler-Cauchy. Nous choisirons ici cette dernière méthode, qui est environ deux fois plus rapide que la précédente, tout en ayant une précision suffisante pour le problème posé.

A partir de x_i et y_i connus, et en se donnant le pas $h_i = x_{i+1} - x_i$, on obtiendra y_{i+1} par les formules :

$$(6.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, y_{i1})] \\ \text{avec} \\ y_{i1} = y_i + h_i f(x_i, y_i) \\ h_i = x_{i+1} - x_i \end{array} \right.$$

Connaissant les vitesses en chaque point de la ligne de courant, on peut déterminer les composantes de la tangente, puis la dérivée de la vitesse suivant la ligne de courant.

Les composantes du vecteur unitaire tangent sont donnés par :

$$(6.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{Xi} = \frac{\bar{\Phi}_{Xi}^0}{\sqrt{(\bar{\Phi}_{Xi}^0)^2 + (\bar{\Phi}_{Yi}^0)^2}} \\ L_{Yi} = \frac{\bar{\Phi}_{Yi}^0}{\sqrt{(\bar{\Phi}_{Xi}^0)^2 + (\bar{\Phi}_{Yi}^0)^2}} \end{array} \right.$$

et la dérivée de la vitesse le long de la ligne de courant est obtenue, d'après (6.5) par :

$$(6.72) \quad \bar{\Phi}_{ni}^0 = \bar{\Phi}_{Xi}^0 L_{Xi} + \bar{\Phi}_{Yi}^0 L_{Yi}$$

Les lignes de courant du double modèle s'obtiendront donc en intégrant numériquement l'équation différentielle (6.69) par la méthode d'Euler-Cauchy, l'extrémité amont des lignes de courant étant située sur une hyperbole équilatère d'équation $(x - a)^2 - y^2 = b^2$, a et b étant des paramètres du maillage. Si l'on choisit comme points de contrôle des facettes de la surface libre les points des lignes de courant du double modèle, on calcule les coefficients d'influence de la carène sur la surface libre lors de la résolution de l'équation différentielle. Il ne reste plus qu'à construire les sommets des facettes à partir de ces points de contrôle. Le nombre de facettes de la surface libre sera NS, les facettes étant numérotées de NC+1 à M = NC+NS.

6.5.6. Résolution du problème avec surface libre :

. Principe :

Après avoir calculé les coefficients d'influence de la surface libre sur la carène et sur elle-même, on construit les systèmes linéaires en fonction de la condition de surface libre choisie. Dans tous les cas, Φ_z est connu en fonction des vitesses et de leurs dérivées sur les lignes de courant du double modèle. Les vitesses sont connues d'après les coefficients d'influence et les densités de sources solutions du problème, seules sont inconnues les dérivées qu'il suffit d'évaluer à l'aide d'un schéma de différences finies. L'expression de Φ_z ainsi obtenue donne, après discrétisation, un système linéaire collocatif dont les inconnues sont les densités de singularités sur la carène et la surface libre.

. Choix du schéma de différences finies :

Le schéma de différences finies utilisé est celui préconisé par C.W.Dawson [18]. Il s'agit d'un schéma de différences finies décentré amont à 4 points où les contributions des dérivées d'ordre 2 et 4 sont annulées. Les coefficients du schéma peuvent être

déterminés d'après les résultats de l'annexe 7 en résolvant le système linéaire (A7.4) .

La dérivée par rapport à 1 d'une fonction F s'écrit alors :

$$(6.73) \left\{ \begin{array}{l} F_{1_i} = \sum_{k=0}^3 e_k F_{1-k} \\ \text{avec :} \\ e_3 = -l_1^2 l_2 (l_1 + l_2)^2 (2l_1 + l_2) / D \\ e_2 = l_1^2 (l_2 + l_3) (l_1 + l_2 + l_3)^2 (2l_1 + l_2 + l_3) / D \\ e_1 = -l_3 (l_1 + l_2)^2 (l_1 + l_2 + l_3)^2 (2l_1 + 2l_2 + l_3) / D \\ e_0 = - (e_1 + e_2 + e_3) \\ D = l_1 l_2 l_3 (l_1 + l_2) (l_1 + l_2 + l_3) (l_2 + l_3) (3l_1 + 2l_2 + l_3) \\ l_m = \sqrt{(x_{i-m+1} - x_{i-m})^2 + (y_{i-m+1} - y_{i-m})^2} \end{array} \right.$$

Le démarrage du schéma sur les trois premiers points de chaque ligne de courant peut être assuré à partir de schémas d'ordre inférieur suivant la technique utilisée par C.W.Dawson [18], ou bien en écrivant, comme K.Mori [91] que la contribution des vitesses induites par les facettes de la surface libre en ces points est nulle, ce qui revient à écrire que les vitesses y sont calculées avec l'hypothèse du double modèle. K.Mori [91] a montré que, dans le cas du problème bidimensionnel, cette dernière technique donnait des résultats plus stables que ceux de C.W.Dawson. Nous utiliserons donc cette méthode.

. Constitution du système linéaire pour la condition de surface libre de Neumann-Kelvin :

Cette condition s'écrit, d'après (6.42)

$$(6.74) \quad - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \Phi_z = \frac{C^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x = \frac{1}{k_0} \Phi_{xx}, \quad k_0 = \frac{g}{C^2}$$

La vitesse sur la surface libre est déterminée, une fois connue la distribution de singularités solution du problème complet, par :

$$(6.75) \quad \Phi_x = \sum_{j=1}^M \sigma_j X_{ij} - C$$

M = NC + NS étant le nombre total de facettes sur la carène et la surface libre. Si l'on calcule la dérivée par un schéma de différences finies à 4 points décentré amont, on a :

$$(6.76) \quad \Phi_{xx_i} = \sum_{k=0}^3 e_k \Phi_{x(i-k)}$$

L'équation à satisfaire sur la surface libre s'écrira donc :

$$(6.77) \quad k_0 \frac{\sigma_i}{2} = \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^3 e_k X_{(i-k)j} \sigma_j - C \sum_{k=0}^3 e_k$$

et comme, compte tenu des propriétés des schémas de différences finies décrites dans l'annexe 7, on a :

$$\sum_{k=0}^{K-1} e_k = 0$$

L'équation s'écrit :

$$(6.78) \quad k_0 \frac{\sigma_i}{2} = \sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=0}^3 e_k X_{(i-k)j} \right) \sigma_j$$

Après avoir adimensionnalisé par rapport à la vitesse ($\bar{\sigma}_j = \sigma_j/C$), le système linéaire à résoudre s'écrit donc :

$$(6.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\bar{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^M (X_{ij} p_i + Y_{ij} q_i + Z_{ij} r_i) \bar{\sigma}_j = p_i \quad M_i \in \Sigma \\ \text{b) } \sum_{j=NC+1}^M X_{ij} \bar{\sigma}_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les 3 premiers} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \\ \text{c) } k_0 \frac{\bar{\sigma}_i}{2} - \sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=0}^3 e_k X_{(i-k)j} \right) \bar{\sigma}_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les autres} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

. Constitution du système linéaire pour la condition de surface libre de Dawson :

Cette condition s'écrit :

$$(6.80) \quad g \Phi_z = 2 \Phi_{rl} \Phi_{rl}^2 - (\Phi_{rl}^2 \Phi_1)_1$$

Φ_{rl} étant obtenu à partir de la solution du problème du double modèle.

$$(6.81) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{rl_i} = C (\bar{\Phi}_{Xi}^0 L_{Xi} + \bar{\Phi}_{Yi}^0 L_{Yi}) \\ \text{avec} \\ \bar{\Phi}_{Xi}^0 = \sum_{j=1}^{NC} \bar{\sigma}_j^0 X_{ij} - 1 \\ \bar{\Phi}_{Yi}^0 = \sum_{j=1}^{NC} \bar{\sigma}_j^0 Y_{ij} \\ L_{Xi} = \frac{\bar{\Phi}_{Xi}^0}{\sqrt{(\bar{\Phi}_{Xi}^0)^2 + (\bar{\Phi}_{Yi}^0)^2}} \quad , \quad L_{Yi} = \frac{\bar{\Phi}_{Yi}^0}{\sqrt{(\bar{\Phi}_{Xi}^0)^2 + (\bar{\Phi}_{Yi}^0)^2}} \end{array} \right.$$

De même, on a :

$$(6.82) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{l_i} = C (\bar{\Phi}_{Xi} L_{Xi} + \bar{\Phi}_{Yi} L_{Yi}) \\ \text{avec} \\ \bar{\Phi}_{Xi} = \sum_{j=1}^M \bar{\sigma}_j X_{ij} - 1 \\ \bar{\Phi}_{Yi} = \sum_{j=1}^M \bar{\sigma}_j Y_{ij} \end{array} \right.$$

Et, en exprimant successivement chaque terme de la condition (6.80) :

$$(6.83) \quad \Phi_{rl_i} = \sum_{k=0}^3 e_k \Phi_{rl(i-k)}$$

$$(6.84) \quad (\Phi_{rl}^2 \Phi_1)_{l_i} = \sum_{k=0}^3 e_k \left[\Phi_{rl(i-k)}^2 \sum_{j=1}^M [X_{(i-k)_j} L_{X(i-k)} + Y_{(i-k)_j} L_{Y(i-k)}] \bar{\sigma}_j - \Phi_{rl(i-k)}^2 L_{X(i-k)} \right]$$

Après adimensionnalisation par rapport à la vitesse, on obtient le système linéaire:

$$(6.85) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\bar{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^M (X_{ij} p_i + Y_{ij} q_i + Z_{ij} r_i) \bar{\sigma}_j = p_i \quad M_i \in \Sigma \\ \text{b) } \sum_{j=NC+1}^M (X_{ij} L_{Xi} + Y_{ij} L_{Yi}) \bar{\sigma}_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les 3 premiers} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \\ \text{c) } -k_0 \frac{\bar{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)}^2 [X_{(i-k)_j} L_{X(i-k)} + Y_{(i-k)_j} L_{Y(i-k)}] \right\} \bar{\sigma}_j = \\ 2 \bar{\Phi}_{rl_i}^2 \left[\sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)} \right] + \sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)}^2 L_{X(i-k)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les autres} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Constitution du système linéaire pour la condition de surface libre de Dawson modifiée :

La condition de surface libre de Dawson modifiée s'obtient à partir des équations (6.30) ou (6.31). La seule modification par rapport à la condition de Dawson consiste à prendre en compte un terme fonction de la hauteur de vagues et de la dérivée verticale de la vitesse dans le plan de la surface libre. Ce dernier terme nécessite donc le calcul de coefficients d'influence supplémentaires qui sont les coefficients d'influence de la dérivée verticale de la vitesse du double modèle dans le plan de la surface libre Z_{ij}^R .

Les coefficients Z_{ij}^R sont calculés par dérivation numérique à partir des coefficients Z_{ij} . On utilise donc la formule :

$$(6.86) \quad Z_{ij}^R = \frac{Z_{ij}|_{z=t} - Z_{ij}|_{z=0}}{t} = \frac{Z_{ij}|_{z=t}}{t}$$

t étant le pas de dérivation. On choisit $t = 0,01 T$, T étant le tirant d'eau.

Le système linéaire à résoudre est alors défini par :

$$(6.87) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\bar{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^M (X_{ij} p_i + Y_{ij} q_i + Z_{ij} r_i) \bar{\sigma}_j = p_i \quad M_i \in \Sigma \\ \text{b) } \sum_{j=NC+1}^M (X_{ij} L_{Xi} + Y_{ij} L_{Yi}) \bar{\sigma}_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les 3 premiers} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \\ \text{c) } -\frac{k_0 \bar{\sigma}_i}{2} + \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)}^2 [X_{(i-k)_j} L_{X(i-k)} + Y_{(i-k)_j} L_{Y(i-k)}] \right\} \bar{\sigma}_j + \bar{\zeta}_i \sum_{j=1}^{NC} \bar{\sigma}_j Z_{ij}^R = \\ 2 \bar{\Phi}_{rl_i}^2 \left[\sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)} \right] + \sum_{k=0}^3 e_k \bar{\Phi}_{rl(i-k)}^2 L_{X(i-k)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_i \in SL, \text{ sur les autres} \\ \text{points de chaque ligne de courant.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour utiliser cette condition de surface libre, il faut connaître la hauteur de vagues $\bar{\zeta}_i$ dans le plan de la surface libre. Initialement, il est possible d'approcher cette

hauteur, suivant l'hypothèse de Nakatake, par :

$$(6.88) \quad \bar{\zeta}_i = \bar{\zeta}_i^R = \frac{1}{2k_0} (1 - \bar{\Phi}_{r1i}^2)$$

qui est la hauteur de vagues correspondant à la déformée de surface libre du double modèle. Si l'on itère sur la solution du problème, il sera possible d'utiliser la dernière hauteur de vagues calculée :

$$(6.89) \quad \bar{\zeta}_i = \frac{1}{2k_0} (1 - \bar{\Phi}_{1i}^2)$$

. Résolution des systèmes linéaires :

Les systèmes linéaires définis précédemment sont de rang élevé (> 500) et ne sont pas susceptibles d'être résolus directement par une méthode itérative de type Gauss-Seidel, ainsi que nous avons pu le constater dans quelques cas pratiques. Aussi, nous utiliserons une méthode de résolution directe de type Gauss, avec triangularisation par colonnes.

6.5.7. Calcul des efforts :

Les efforts sur la carène au premier ordre sont obtenus d'après les équations (6.56) en supposant les pressions constantes sur les facettes de la carène. Pour la résistance de vagues, on retranche à la valeur ainsi obtenue, l'effort sur le double modèle qui, théoriquement, devrait être nul d'après le paradoxe de d'Alembert, l'influence de cette correction n'étant sensible que pour des carènes présentant une forte dissymétrie avant-arrière comme, par exemple dans le cas de carènes avec un bulbe ou un tableau arrière .

Les coefficients de rappel hydrostatique de la carène discrétisée sont donnés par les formules (3.114) à (3.121) du paragraphe 3.4. On en déduit la position dynamique prise par la carène en résolvant l'équation (6.58).

Les efforts du second ordre peuvent alors être obtenus à partir de la formule (6.61) discrétisée, la hauteur de vagues à la flottaison étant calculée dans le fluide à une cote $z = -d$, la verticale issue de ce point coupant la surface libre à une distance d de la normale extérieure au segment de la flottaison. Dans la pratique, on choisit $d = 10^{-4} L$, L étant la longueur à la flottaison de la carène. Dans le cas où le modèle est maintenu fixe, la formule (6.61) peut être utilisée à la première itération.

6.6. ORGANISATION DU CODE REVA :

6.6.1. Généralités.

Un code de calcul, appelé REVA, fondé sur les développements précédemment décrits a été conçu et réalisé à partir de juin 1985 par G. Delhommeau et

J.J.Maisonneuve. Ce code permet de calculer la résistance de vagues d'une carène symétrique ou non, immergée ou perçant la surface libre, en approchant la condition de surface libre suivant les modèles de Neumann-Kelvin, Dawson ou Dawson modifié.

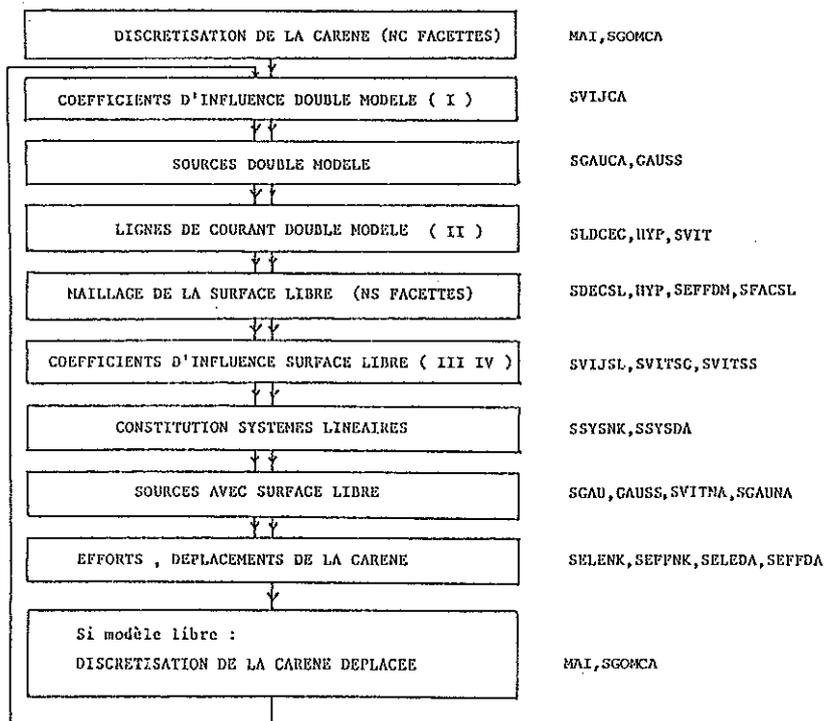
Ce code est composé d'un programme principal et de 39 sous-programmes représentant 4900 instructions. Il a été écrit en FORTRAN norme ANSI 77, les sorties graphiques étant effectuées à l'aide de la bibliothèque NCAR.

Une version vectorielle a été réalisée en 1985 sur CRAY 1-S suite à l'attribution d'heures de calcul par le Conseil Scientifique du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche.

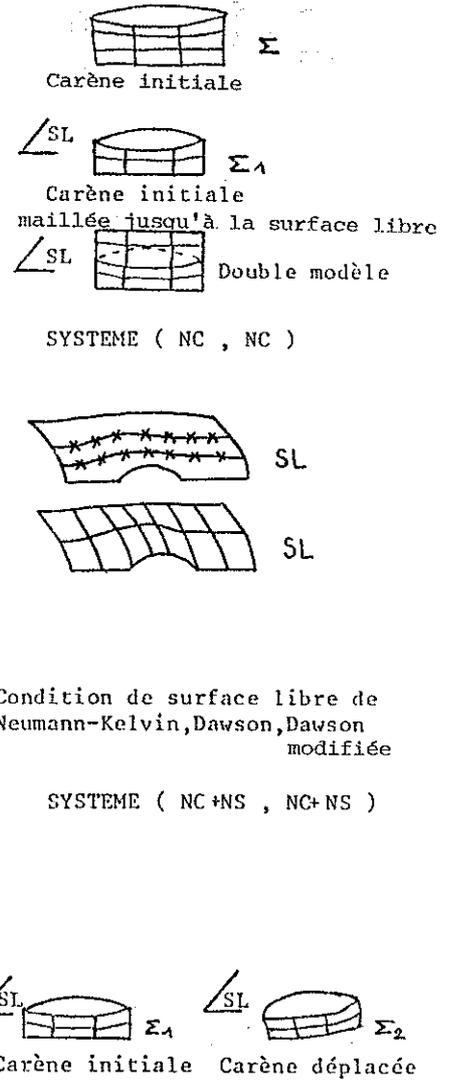
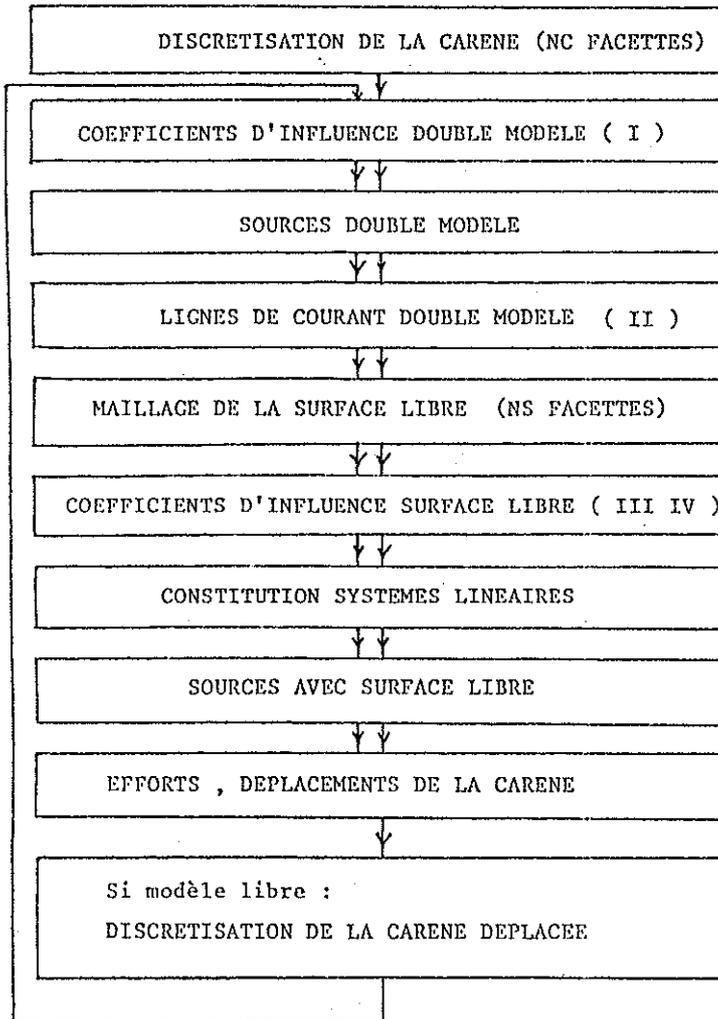
6.6.2. Liste des principaux modules et utilisation :

REVA : Programme principal
 MAI : Maillage de la carène jusqu'à la surface libre...
 SGMCA : Caractéristiques géométriques des facettes (normale, aire, centre de gravité)
 SVIJCA : Coefficients d'influence du double modèle
 SGAUCA : Constitution du système linéaire pour le double modèle
 GAUSS : Sous-programme de résolution de système par triangularisation de GAUSS
 SLDCEC : Lignes de courant de la surface libre par la méthode d'EULER-CAUCHY
 HYP : Positionnement des points sur une hyperbole
 SVIT : Coefficients d'influence du double modèle sur la surface libre
 SDECSL : Découpage de la surface libre en facettes
 SEFFDM : Efforts sur le double modèle
 SFACSL : Calcul des facettes de la surface libre touchant la carène
 SVIJSL : Appel des programmes des coefficients d'influence de la surface libre
 SVITSC : Coefficients d'influence de la surface libre sur la carène
 SVITSS : Coefficients d'influence de la surface libre sur elle-même
 SSYSNK : Système linéaire avec condition de surface libre (C.S.L.) de NEUMANN-KELVIN
 SSSYDA : Système linéaire avec C.S.L. de DAWSON
 SVITNA : Coefficients d'influence supplémentaires pour C.S.L. de DAWSON-NAKATAKE
 SGAU : Résolution du système (C.S.L. de NEUMANN-KELVIN et DAWSON)
 SGAUNA : Résolution du système (C.S.L. de DAWSON-NAKATAKE)
 SELENK : Elévation de la surface libre (C.S.L. de NEUMANN-KELVIN)
 SEFPNK : Efforts sur la carène (C.S.L. de NEUMANN-KELVIN)
 SELEDA : Elévation de la surface libre (C.S.L. de DAWSON et DAWSON-NAKATAKE)
 SEFFDA : Efforts sur la carène (C.S.L. de DAWSON et DAWSON-NAKATAKE)

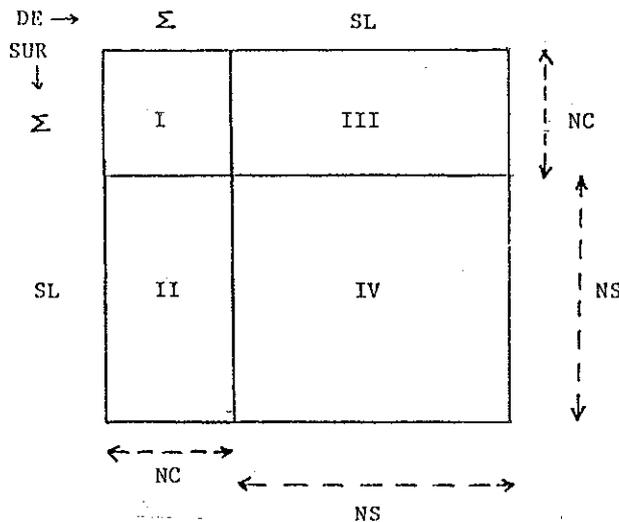
Sous-programmes



6.6.3. Organigramme de fonctionnement :



COEFFICIENTS D'INFLUENCE DES FACETTES



Sur l'organigramme est indiqué entre parenthèses, l'étape de calcul de chaque bloc de la matrice.

6.6.4. Parallélisation du code :

Pour une carène présentant une symétrie, en maillant le demi-espace en 132 facettes sur la carène et 400 sur la surface libre, le temps de calcul initial sur CRAY 1-S est de 77 s CPU réparties comme suit :

24 s CPU \approx 31 % du temps pour le calcul des coefficients d'influence
28 s CPU \approx 38 % du temps pour la résolution des systèmes linéaires.

La parallélisation a donc porté essentiellement sur ces deux points. L'algorithme de parallélisation du calcul des coefficients d'influence est décrit dans l'annexe 8, son rapport de performance est de l'ordre de 4.

Pour la résolution des systèmes linéaires, nous avons utilisé des sous-programmes de la bibliothèque parallélisée LINPACK, SGEFA qui factorise le système suivant la méthode L-U en décomposant la matrice du système en un produit de deux matrices triangulaires inférieure (Lower) et supérieure (Upper) et SGESL qui le résout.

Après parallélisation, les temps de calcul sont les suivants :

5,4 s CPU \approx 51 % du temps pour le calcul des coefficients d'influence
2,5 s CPU \approx 24 % du temps pour la résolution des systèmes linéaires.

L'ensemble du programme est alors exécuté en 10,6 s CPU ce qui représente un rapport de performance de 7,3 entre les versions scalaire et vectorielle.

6.6.5. Temps de calcul :

Les temps de résolution des systèmes linéaires sont proportionnels à M^3 et les autres croissent sensiblement comme M^2 , si M est le nombre de facettes sur la carène et la surface libre maillée pour une carène présentant S symétrie (0 ou 1). Les temps de calcul sur CRAY 1-S peuvent être estimés par les formules suivantes :

- En mode vectoriel :

$$T_{s \text{ CPU}} = 1,66 \cdot 10^{-8} M^3 + 1,43 \cdot 10^{-5} (1+S) M^2$$

- En mode scalaire :

$$T_{s \text{ CPU}} = 1,94 \cdot 10^{-7} M^3 + 8,4 \cdot 10^{-5} (1+S) M^2$$

Sur un ordinateur moyen, type Vax 750, les temps CPU en mode scalaire sont donnés par :

$$T_{s \text{ CPU}} = 4,5 \cdot 10^{-6} M^3 + 2 \cdot 10^{-3} (1+S) M^2$$

soit environ 1800 s pour 532 facettes et une symétrie.

6.7. RESULTATS NUMERIQUES:

La méthode des singularités de Rankine étant fondée sur l'utilisation des schémas de différences finies décentré amont à la fois pour satisfaire la condition de surface libre et la condition de radiation, nous allons commencer par rappeler les résultats de quelques tests numériques montrant le comportement de ces schémas. Nous traiterons ensuite les deux exemples du chapitre précédent, l'ellipsoïde immergé et la carène de Wigley. On notera que, dans toutes les figures de ce paragraphe, les carènes avancent de la droite vers la gauche, l'aval de l'écoulement est donc situé à droite des figures.

6.7.1. Test des schémas de différences finies :

De façon à pouvoir comparer les résultats analytiques et numériques, les tests sont effectués dans le cas d'une source ponctuelle, avec la condition de surface libre de Neumann-Kelvin. Les solutions analytiques en bidimensionnel et en tridimensionnel sont connues, ce qui permet de mettre en évidence l'influence des paramètres du schéma.

- Cas bidimensionnel :

La hauteur de vagues ζ à la surface libre pour une source ponctuelle d'intensité σ_0 immergée à une profondeur h et se déplaçant à la vitesse C est donnée, d'après K.Mori [91], par :

$$(6.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = -\frac{C}{g} \frac{\sigma_0}{2\pi} \left[\frac{2x}{r_0^2} - 2 \operatorname{sgn}(x) \int_0^\infty \frac{m \cos mh - k_0 \sin mh}{k_0^2 + h^2} e^{-m|x|} dm \right. \\ \left. - 4\pi k_0 e^{-k_0 h} \cos k_0 x \right] \quad , \quad k_0 = \frac{g}{C^2} \end{array} \right.$$

La comparaison entre la solution analytique (6.90) et la solution numérique est effectuée pour $\sigma_0 = 2\pi C/k_0$ et $C = \sqrt{gh}$.

Les résultats présentés sur la planche suivante ont été obtenus avec des schémas décentrés amont à 4 points, l'ordre des dérivées dont la contribution est annulée dans le développement en série de Taylor étant respectivement 2 et 3, 2 et 4, 3 et 4.

Maillage de la surface libre : 100 facettes réparties uniformément entre -6 et +23

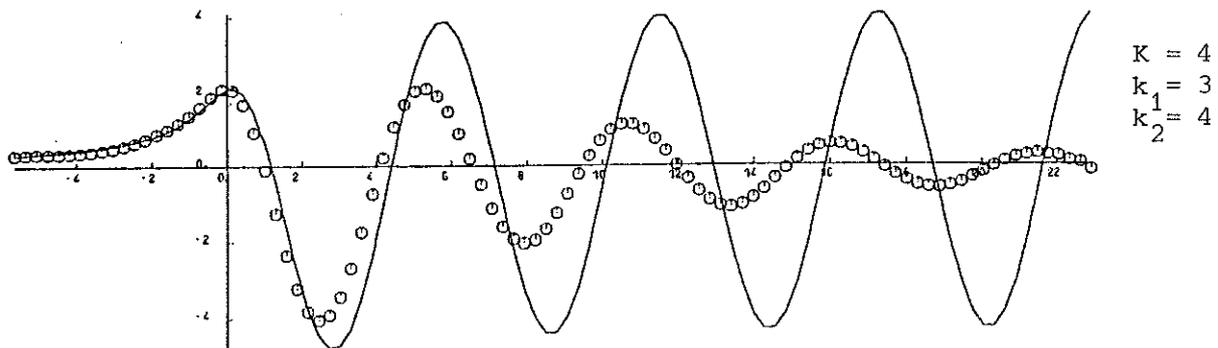
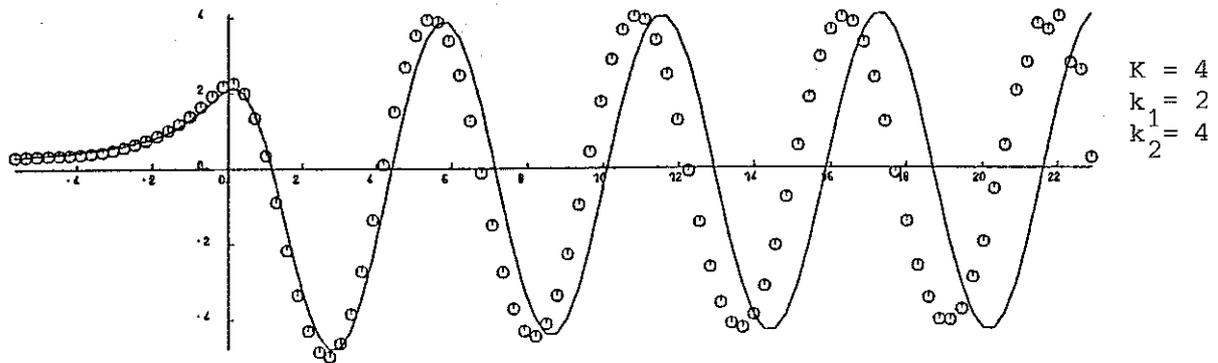
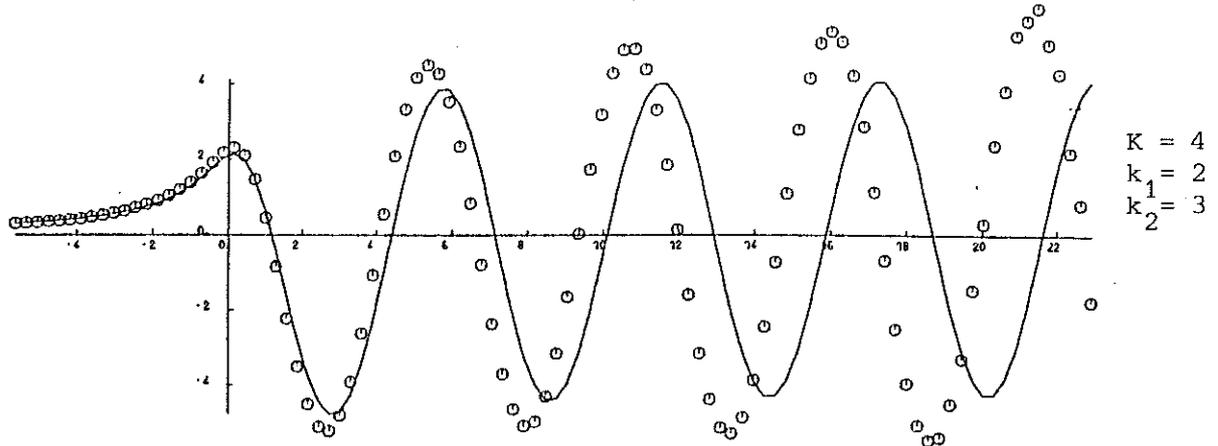


Planche 6.1

On peut remarquer que le premier schéma est divergent, le deuxième stable, et le troisième trop amorti. Le deuxième schéma est celui préconisé par C.W.Dawson [18]. Dans le cas bidimensionnel, la meilleure solution pour un schéma d'ordre 4 est obtenue en annulant les contributions des dérivées d'ordre 2 et 4.

- Cas tridimensionnel :

La hauteur de vagues à la surface libre pour une source ponctuelle d'intensité σ_0 immergée à la profondeur h et se déplaçant à une vitesse C est donnée par [21] :

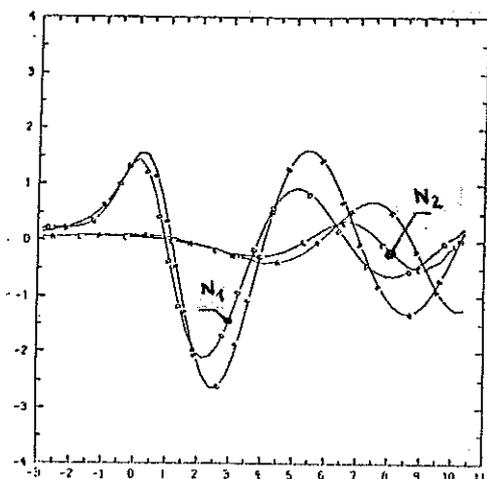
$$(6.91) \quad \zeta = -\frac{C\sigma_0}{g4\pi} - \frac{2k_0^2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \, i \sec^3\theta \left[G(\xi) - \frac{1}{\xi} \right]$$
$$\xi = k_0 \sec^2\theta [h + i(x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad k_0 = \frac{g}{C^2}$$

$G(\zeta)$ étant défini par les formules (5.36).

Le test sera réalisé avec $\sigma_0 = 4\pi C/k_0$ et $C = \sqrt{gh}$.

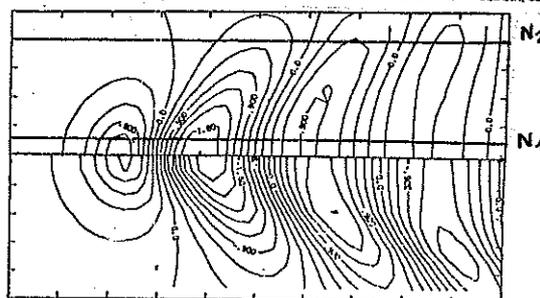
Sur les figures suivantes, on montre les lignes de niveau de la surface libre obtenues analytiquement et numériquement pour différents schémas. Sur les figures de gauche, on compare les hauteurs de surface libre issues de la formule (3.91) et celles obtenues numériquement en utilisant les schémas de différences finies, suivant deux coupes, l'une proche de l'axe de symétrie et l'autre voisine de la limite de la surface libre maillée (coupes N1 et N2 respectivement). Là encore, le schéma d'ordre 4 de Dawson donne les meilleurs résultats.

On peut remarquer sur ces courbes que l'influence de la troncature de la surface libre derrière la source, qui correspond à l'absence d'écriture de condition de radiation dans la méthode numérique, se fait sentir sur environ une demi-longueur d'onde près des bords du maillage, le schéma décentré amont empêchant la perturbation de se propager.



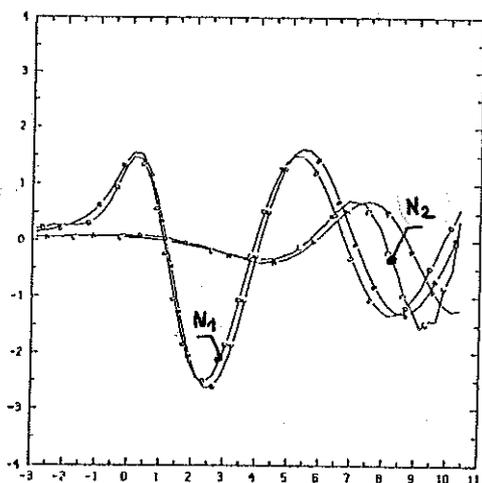
Maillage de la surface libre :

Numérique
Ordre 3 , Dérivée d'ordre 3 annulée

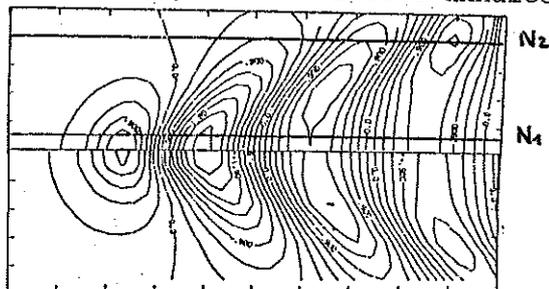


Analytique

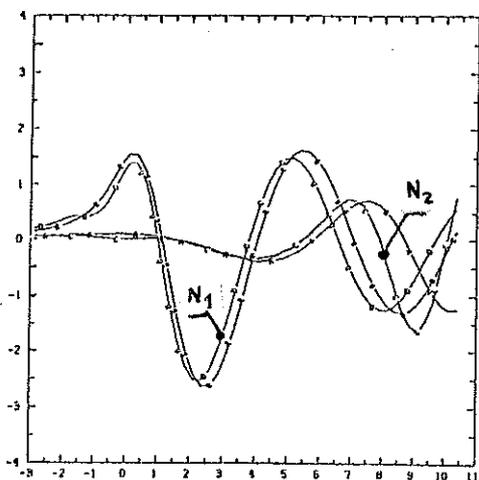
54 facettes uniformément réparties
en x entre -3 et +10,5
8 facettes uniformément réparties
en y entre 0 et +4
432 facettes au total



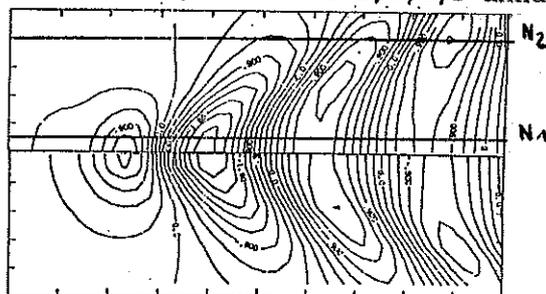
Numérique
Ordre 4 , Dérivée 2 et 4 annulées



Analytique



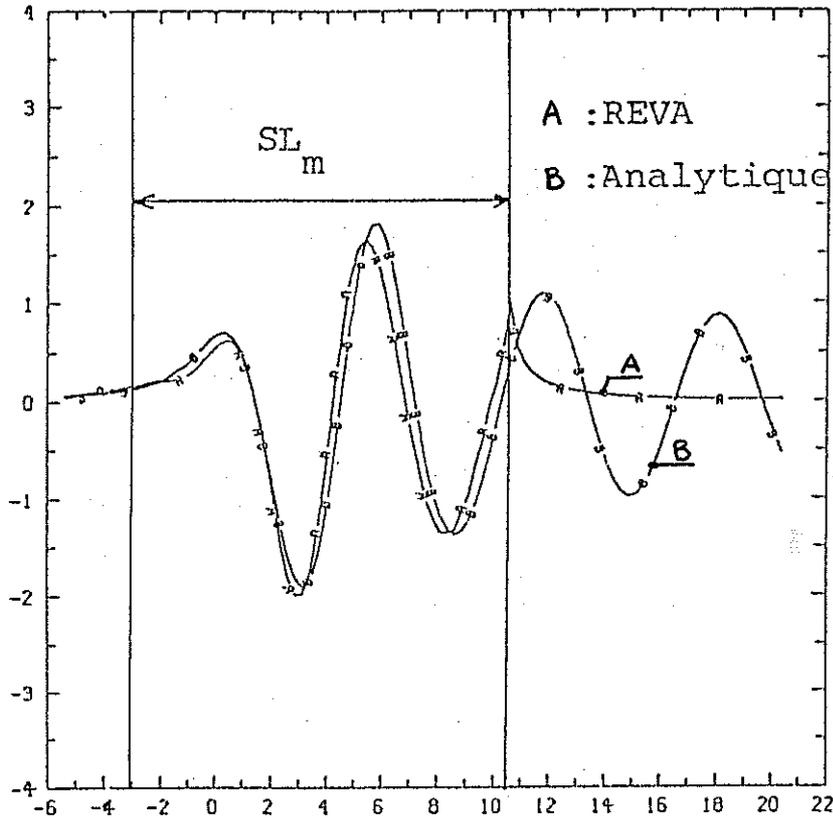
Numérique
Ordre 6 , Dérivées 2,3,4,5 annulées



Analytique

- Evolution de la solution en dehors de la surface libre maillée :

Sur la figure 6.3 , nous avons représenté la coupe N1 de la surface libre maillée en calculant la hauteur de vagues à l'extérieur de la partie maillée SL_m .



Evolution à l'extérieur de la zone maillée

Figure 6.3

On remarque que, conformément à la condition de surface libre imposée en dehors de la surface libre maillée : $\Phi_z = 0$, la hauteur de vagues décroît rapidement sans oscillation à l'arrière de la source. Il en est de même à l'avant, la hauteur de vagues tend vers zéro comme le potentiel du double modèle et donc se raccorde avec les premiers points du schéma de différences finies si l'on utilise la condition d'initialisation de Mori. La déformée de surface libre obtenue par cette méthode est semblable à celle que l'on obtiendrait en entourant une maquette d'un système absorbant les vagues de sillage.

6.7.2. Ellipsoïde immergé :

Nous allons mettre en oeuvre la méthode dans le cas de l'ellipsoïde décrit au paragraphe 5.8.1. Il s'agit d'un ellipsoïde de révolution dont les caractéristiques principales sont les suivantes :

Rayon : $b = 1 \text{ m}$
Longueur : $2a = L = 10 \text{ m}$
Immersion de l'axe : $H = 1,584 \text{ m}$

Le nombre de Froude étant défini par :

$$F_n = \frac{C}{\sqrt{gL}}$$

C étant la vitesse d'avance en m/s.

- Maillage de la carène et de la surface libre :

Le maillage initial de la carène sera le même que celui utilisé au chapitre 5. La demi-carène décrite a été discrétisée en 192 facettes comme indiqué sur la figure 6.4.

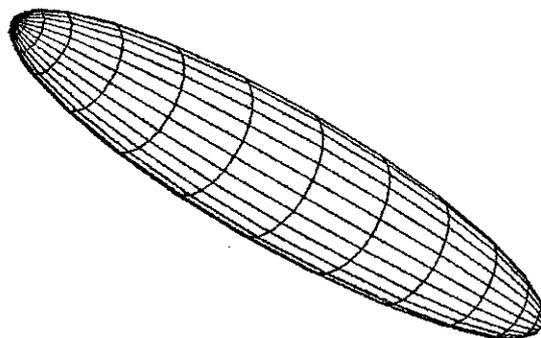


Figure 6.4

La surface libre est initialement représentée par 290 facettes réparties de la façon suivante :

- 14 facettes sur une longueur L en avant de l'axe de l'ellipsoïde
- 15 facettes sur une longueur $1,5 L$ en arrière de l'axe de l'ellipsoïde
- 10 facettes sur une largeur $8b$ sur le côté.

Le point de départ des lignes de courant est situé sur une hyperbole équilatère, ce qui a pour but d'augmenter le nombre de facettes utiles (où la hauteur de vagues n'est pas nulle) sur la surface libre, et permet de mieux représenter l'écoulement dans le dièdre de Kelvin.

La répartition des facettes sur la surface libre après maillage autour des lignes de courant est indiquée sur la figure 6.5.

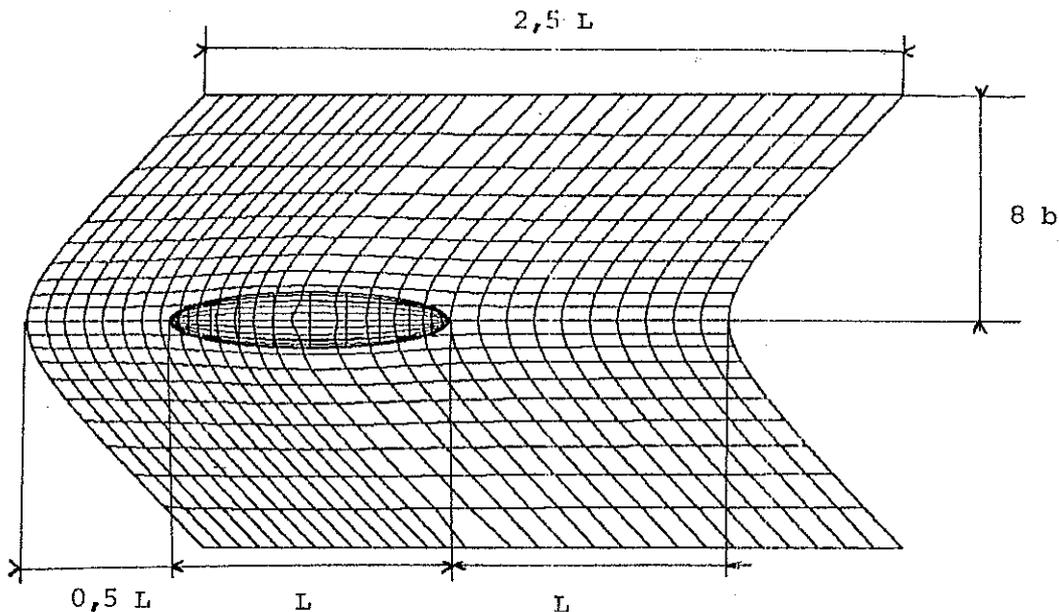


Figure 6.5

- Etude de la convergence :

Pour étudier la convergence, nous avons défini 2 maillages de la carène (192 facettes et 360 facettes) et quatre maillages de la surface libre (3 en 290 facettes et 1 en 340 facettes). Pour les 3 maillages en 290 facettes, nous avons fait varier la distance de maillage en arrière de la carène, les 15 facettes étant réparties sur L ; $1,5 L$ (maillage initial) et $2L$.

Le maillage de la surface libre en 340 facettes est défini par :

- 14 facettes sur L en avant de l'axe.
- 20 facettes sur 2L en arrière de l'axe.
- 10 facettes sur 8b sur le coté.

Ces maillages sont repérés par les numéros suivants (f = facettes)

- 1 : 192 x 290 10 f sur L à l'arrière
- 2 : 192 x 290 10 f sur 1,5 L à l'arrière (maillage initial)
- 3 : 192 x 290 10 f sur 2L à l'arrière
- 4 : 192 x 340 20 f sur 2 L à l'arrière
- 5 : 360 x 290 10 f sur 1,5 L à l'arrière
- 6 : 360 x 340 20 f sur 2 L à l'arrière

Les résultats de la résistance de vagues RW_N en Newtons ,où N est le repère du maillage utilisé, calculée par intégration des pressions au premier ordre avec la condition de surface libre de Dawson, sont donnés dans le tableau ci-dessous :

F_n	RW_1 (N)	RW_2 (N)	RW_3 (N)	RW_4 (N)	RW_5 (N)	RW_6 (N)
0,35	831	690	583	696	666	671
0,4	4290	4317	4142	4294	4319	4294
0,45	7994	7994	7985	7997	8064	8067
0,5	10220	9997	10299	10130	10131	10267

A l'examen de ce tableau, il apparait que les valeurs obtenues sont stables à 3 % près, à l'exception des maillages 1 et 3 pour le nombre de Froude de 0,35. Dans le cas du maillage 1, une distance L/2 derrière la carène paraît trop faible, tandis que pour le maillage 3, on doit incriminer la taille des facettes qui devient trop importante pour bien représenter les fluctuations de pression aux faibles nombres de Froude, comme le confirme les résultats convergents obtenus avec les maillages 4,5 et 6.

Dans ce qui suit, nous utiliserons uniquement le maillage 2, qui est le plus économique compte tenu de la qualité des résultats.

- Bilan des résultats :

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus pour l'ellipsoïde de C.Farell [35] à l'aide des différentes théories.

La résistance de vagues en Newtons sera notée RW_N , N étant un indice repérant l'origine du résultat (C.S.L = Condition de Surface Libre, I.P. = Intégration des Pressions) :

- 1 : Sources de Kelvin, calcul par les fonctions de Kochin
- 2 : Sources de Kelvin, I.P. au 2nd ordre
- 3 : Sources de Rankine, C.S.L. de Neumann-Kelvin, I.P. au 1er ordre
- 4 : Sources de Rankine, C.S.L. de Neumann-Kelvin, I.P. au 2nd ordre
- 5 : Sources de Rankine, C.S.L. de Dawson, I.P. au 1er ordre
- 6 : Sources de Rankine, C.S.L. de Dawson, I.P. au 2nd ordre
- 7 : C.Farell [35], C.S.L. de Neumann-Kelvin, analytique
- 8 : C.Farell [36], expériences.

F_n	RW_{1N}	RW_{2N}	RW_{3N}	RW_{4N}	RW_{5N}	RW_{6N}	RW_{7N}	RW_{8N}
0,350	697	704	184	320	690	811	600	800
0,375	2 407	2 340	1 389	1 796	2 242	2 518	2 250	2 200
0,400	4 703	4 497	3 327	4 023	4 317	4 747	4 300	3 750
0,425	6 992	6 624	5 402	6 304	6 347	6 884	6 600	
0,450	8 921	8 402	7 210	8 215	7 994	8 582	8 300	
0,475	10 370	9 725	8 616	9 657	9 190	9 801		
0,500	11 353	10 614	9626	10 682	9997	10 637		
0,525	11 940	11 137	10 316	11 397	10 519	11 214		
0,550	12 213	11 374	10 775	11 903	10 847	11 625		

La formulation de Dawson améliorée donne, dans le cas de l'ellipsoïde, des résultats pratiquement confondus avec ceux de la méthode de Dawson.

Les résultats principaux de ce tableau sont rappelés sur la figure 6.6.

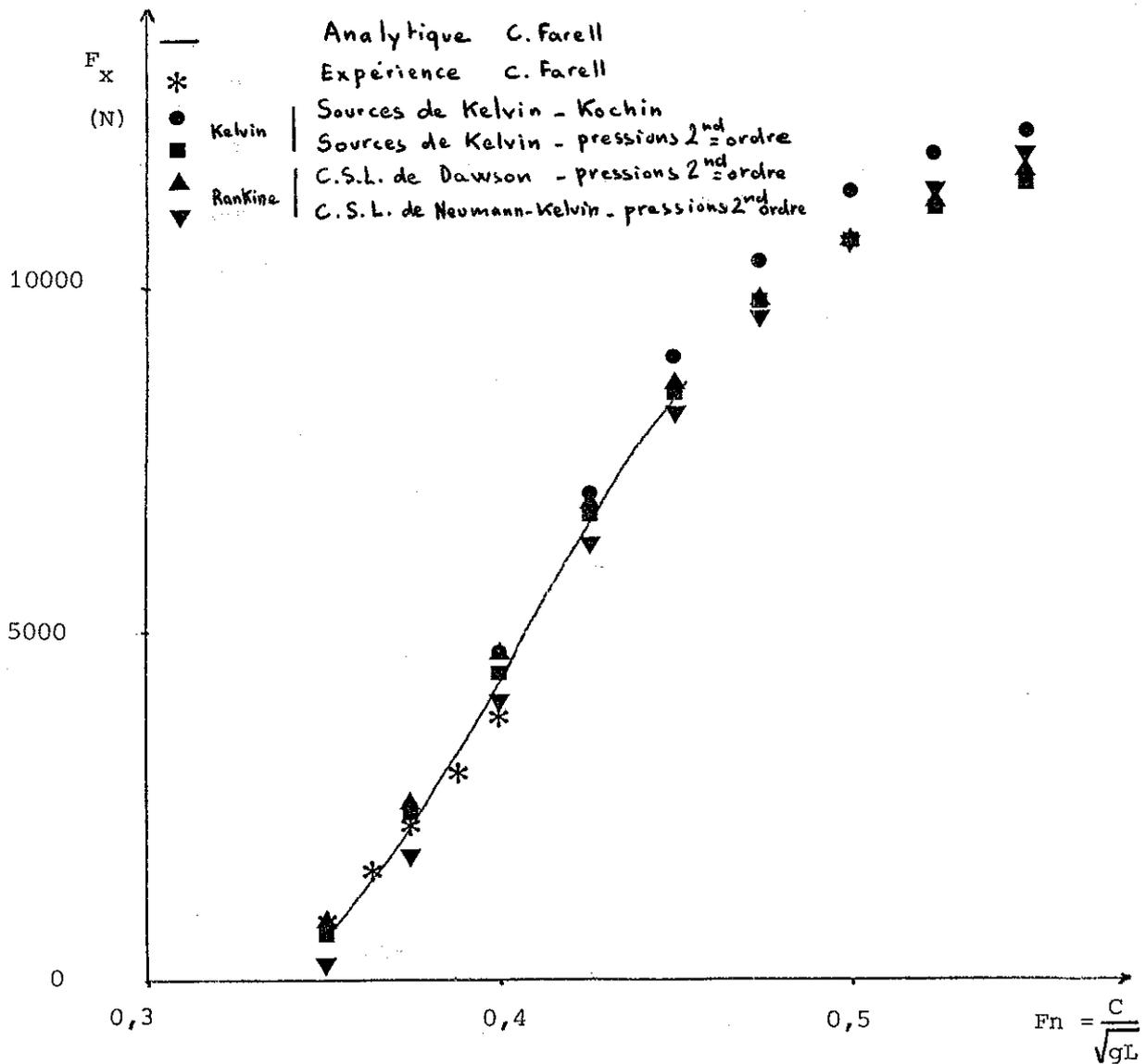


Figure 6.6

- Conclusion :

On peut remarquer un bon accord global entre les différentes formulations. L'intégration des pressions au second ordre donne pratiquement les mêmes résultats avec la méthode des singularités de Rankine, condition de surface libre de Dawson, qu'avec la méthode des singularités de Kelvin. Le calcul par les fonctions de Kochin donne des valeurs légèrement supérieures, contrairement à celles obtenues avec les singularités de Rankine, condition de surface libre de Neumann-Kelvin, qui sont inférieures aux faibles nombres de Froude, tous ces résultats étant proches de ceux de C.Farell, obtenus à la fois par une formulation analytique [35] et par des expériences [77].

Les temps de calcul pour une courbe complète (9 points) par la méthode des singularités de Rankine avec une formulation de la condition de surface libre sont du même ordre de grandeur que pour un seul point avec la méthode des singularités de Kelvin (respectivement 69 mm pour 9 points et 65 mm par point sur un ordinateur moyen

type Micro Vax II).

- Sorties graphiques :

Avec la méthode des singularités de Rankine, il est aisé de tracer les grandeurs caractéristiques de l'écoulement à l'aide de bibliothèques graphiques, comme, par exemple, la bibliothèque NCAR. Les figures suivantes représentent la déformée de surface libre vue en perspective, la hauteur de vagues étant multipliée par 3 pour plus de clarté, ainsi que les lignes de niveau de la surface libre pour différentes vitesses, ce qui permet de visualiser la formation du dièdre de Kelvin.

Déformée de surface libre (hauteurs de vagues x 3) $F_n = 0,350$

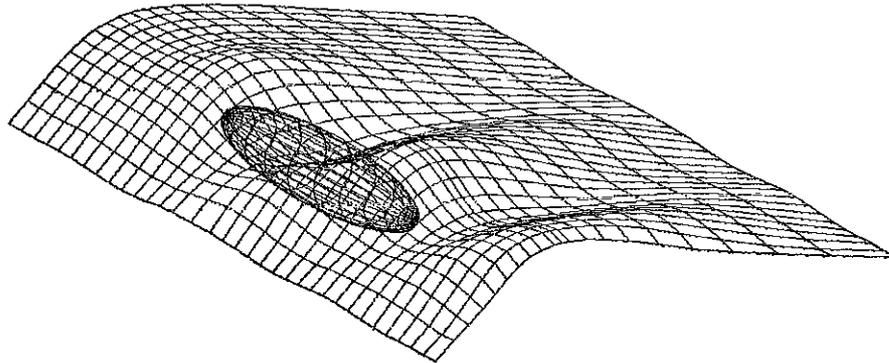


Figure 6.7

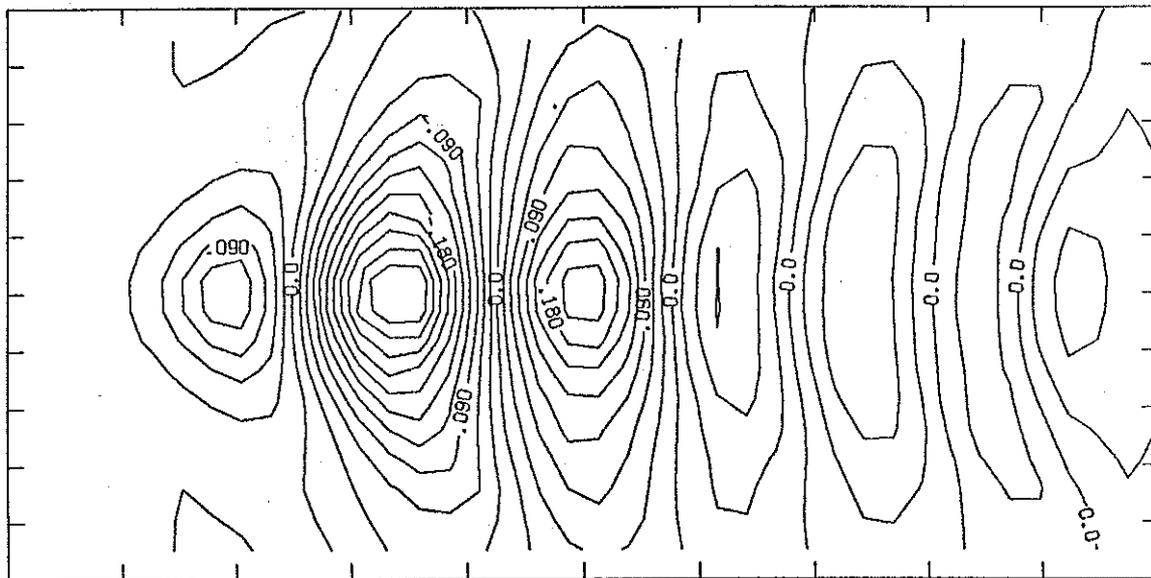
Ellipsoïde immergé

Condition de surface libre de Dawson

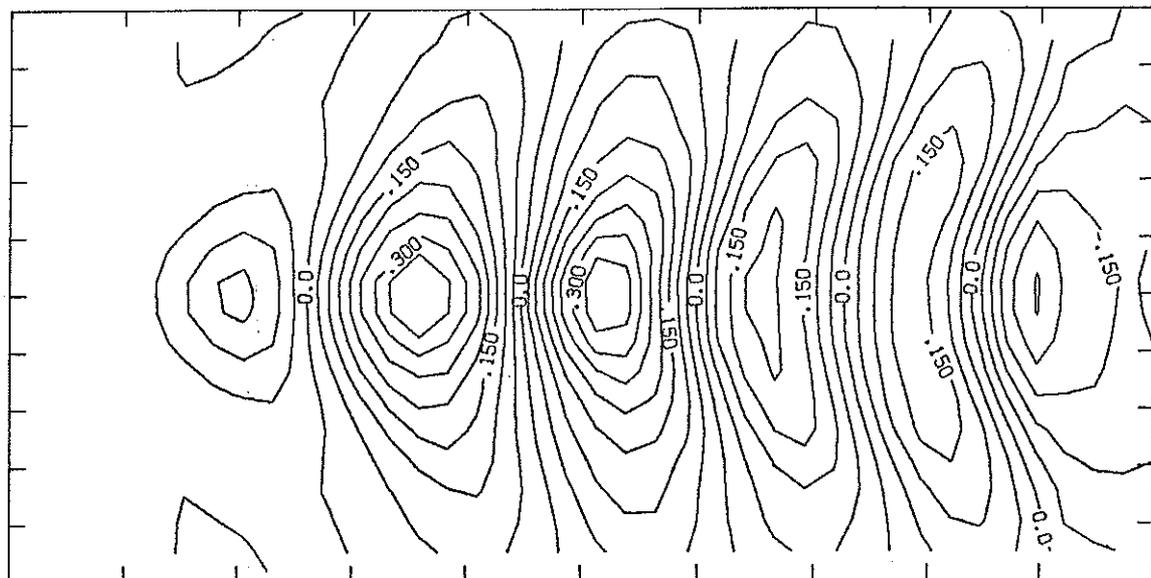
Ellipsoïde immergé

Condition de surface libre de Dawson

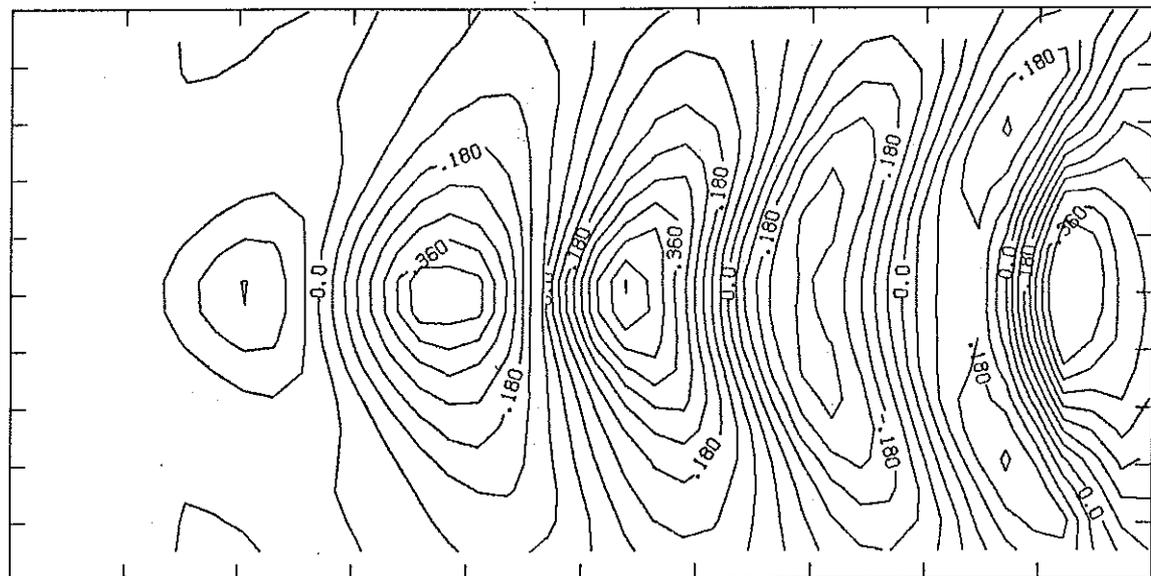
$F_n = 0,350$



$F_n = 0,375$



$F_n = 0,400$



6.7.3. Carène de Wigley :

Nous allons maintenant mettre en oeuvre la méthode dans le cas d'une carène coupant la surface libre, la carène de Wigley, définie au chapitre 5. Les caractéristiques de cette carène sont les suivantes :

Equation de la carène :

$$y = \pm \frac{B}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4L^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{T^2}\right) \quad \text{pour } x \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$$

avec :

L	=	80 m	longueur
B	=	8 m	largeur
T	=	5 m	tirant d'eau

Le nombre de Froude est défini par :

$$F_n = \frac{C}{\sqrt{gL}}$$

- Maillage de la carène et de la surface libre :

Le maillage de la carène est le même que celui décrit au chapitre 5, la demi-carène est représentée par 132 facettes.

La surface libre a été maillée en 400 facettes sur la moitié, réparties comme suit :

- 9 facettes sur 0,5 L à l'avant de l'étrave
- 9 facettes sur 0,5 L à l'arrière
- 10 facettes sur 4 B sur le côté
- 24 facettes sur L le long de la carène s'appuyant sur le maillage de la carène.

Le maillage de la surface libre est resserré autour de l'étrave et de l'étambot de façon à bien représenter les variations de la pente des vagues aux extrémités.

Des essais systématiques réalisés en faisant varier les paramètres du maillage ont montré que les résultats étaient stables à moins de 3 % jusqu'à un nombre de Froude de 0,4. Au delà de cette valeur, les résultats sont minimisés d'environ 5 % par rapport à un maillage où les longueurs de découpage avant et arrière sont deux fois plus grandes.

- Présentation des résultats :

Les résultats obtenus sont résumés sur les planches suivantes dont les trois premières sont extraites de la référence [24].

La première rappelle les caractéristiques principales de la carène de Wigley et montre les maillages de la carène et de la surface libre.

La première courbe de la planche 6.10 montre les résultats de la résistance de vagues calculée par intégration des pressions au second ordre avec la méthode de Dawson et différentes hypothèses de calcul : modèle fixe, modèle fixe avec une correction tenant compte du déplacement de la carène à l'aide des équations (6.60) où le terme en $z_1 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (C \phi)$ a été négligé, et modèle libre. Ces résultats sont comparés aux expériences modèle libre (Lakenby, courbe CW [100] et modèle fixe (expériences japonaises [106]). Sur la courbe suivante, on compare les résultats obtenus à l'aide des différentes conditions de surface libre à ceux de la méthode de Guilloton [21] [52] et de F.Noblesse [9].

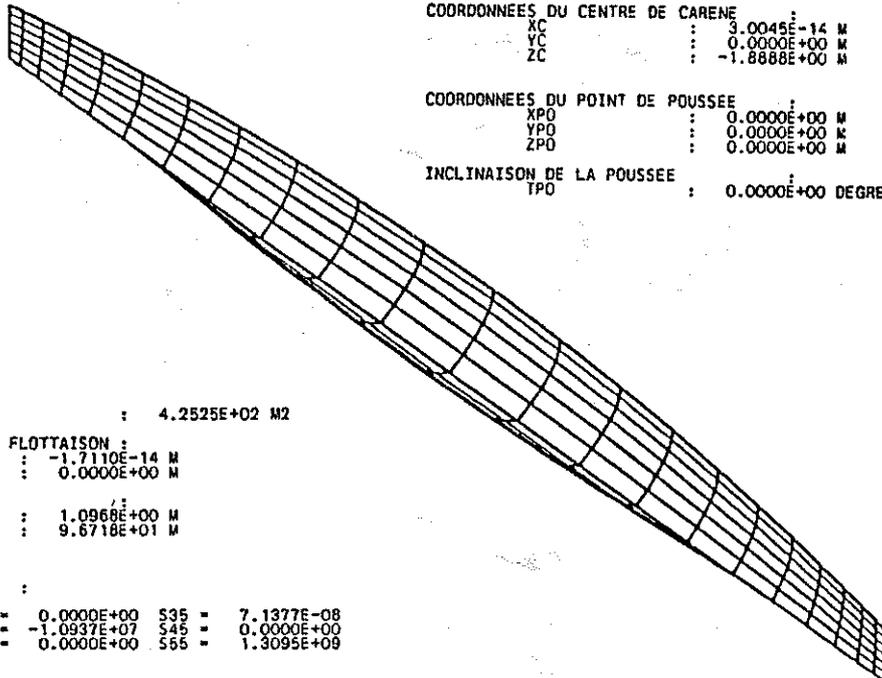
La planche 6.11 montre les assiettes et les enfoncements dynamiques de la carène de Wigley calculés par différentes théories et mesurés.

La figure 6.12 permet de mettre en évidence l'amélioration apportée par la méthode de calcul proposée par rapport aux théories simplifiées du bateau mince et du double modèle.

La planche 6.13 montre les champs de vagues obtenus autour de la carène aux différentes vitesses.

CARENE DE WIGLEY

LONGUEUR A LA FLOTTAISON : 80.00000 M
 LARGEUR : 8.00000 M
 TIRANT D'EAU : 5.00000 M
 DEPLACEMENT : 1.4076E+03 M3
 COTE DU CENTRE DE GRAVITE : 0.0000E+00 M
 SURFACE MOUILLEE : 9.5043E+02 M2
 COORDONNEES DU CENTRE DE CARENE :
 XC : 3.0045E-14 M
 YC : 0.0000E+00 M
 ZC : -1.8888E+00 M
 COORDONNEES DU POINT DE PUSSEE :
 XPO : 0.0000E+00 M
 YPO : 0.0000E+00 M
 ZPO : 0.0000E+00 M
 INCLINAISON DE LA PUSSEE :
 TPO : 0.0000E+00 DEGRES



SURFACE DE FLOTTAISON : 4.2525E+02 M2
 COORDONNEES DU CENTRE DE FLOTTAISON :
 XF : -1.7110E-14 M
 YF : 0.0000E+00 M
 RAYONS METACENTRIQUES :
 PR : 1.0968E+00 M
 GR : 9.6718E+01 M
 MATRICE HYDROSTATIQUE :
 S33 = 4.1717E+06 S34 = 0.0000E+00 S35 = 7.1377E-08
 S43 = 0.0000E+00 S44 = -1.0937E+07 S45 = 0.0000E+00
 S53 = 7.1377E-08 S54 = 0.0000E+00 S55 = 1.3095E+09
 CDW = 0.00000 E-3

CARACTERISTIQUES DU MAILLAGE :
 1 SYMETRIE
 132 FACETTES SUR LA CARENE
 0 FACETTES(S) SUR LES PAROIS
 400 FACETTES SUR LA SURFACE LIBRE
 9 FACETTES SUR 0.50*L A L'AVANT
 9 FACETTES SUR 0.50*L A L'ARRIERE
 10 FACETTES SUR 4.00*B SUR LE COTE

• Points de contrôle

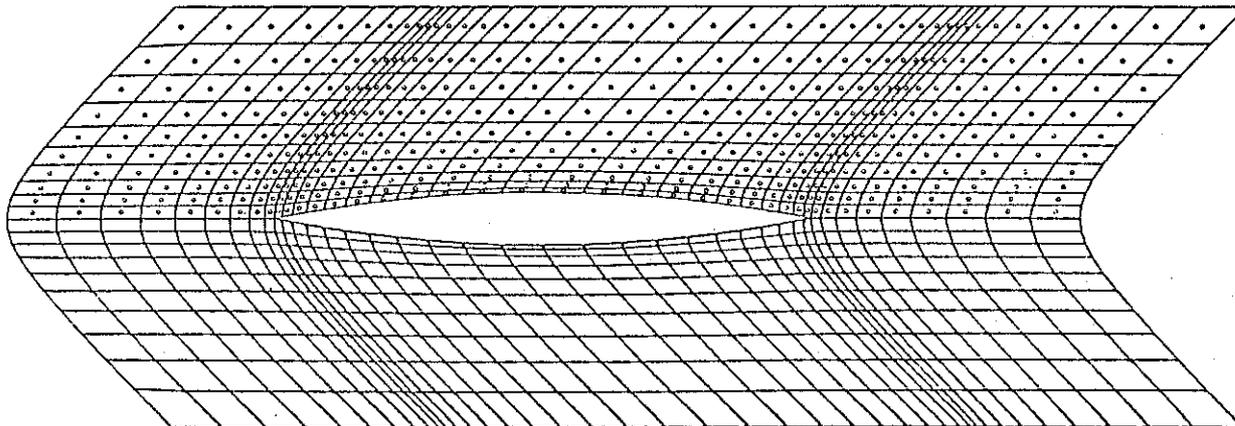


Planche 6.9

Résistance de vagues . Wigley

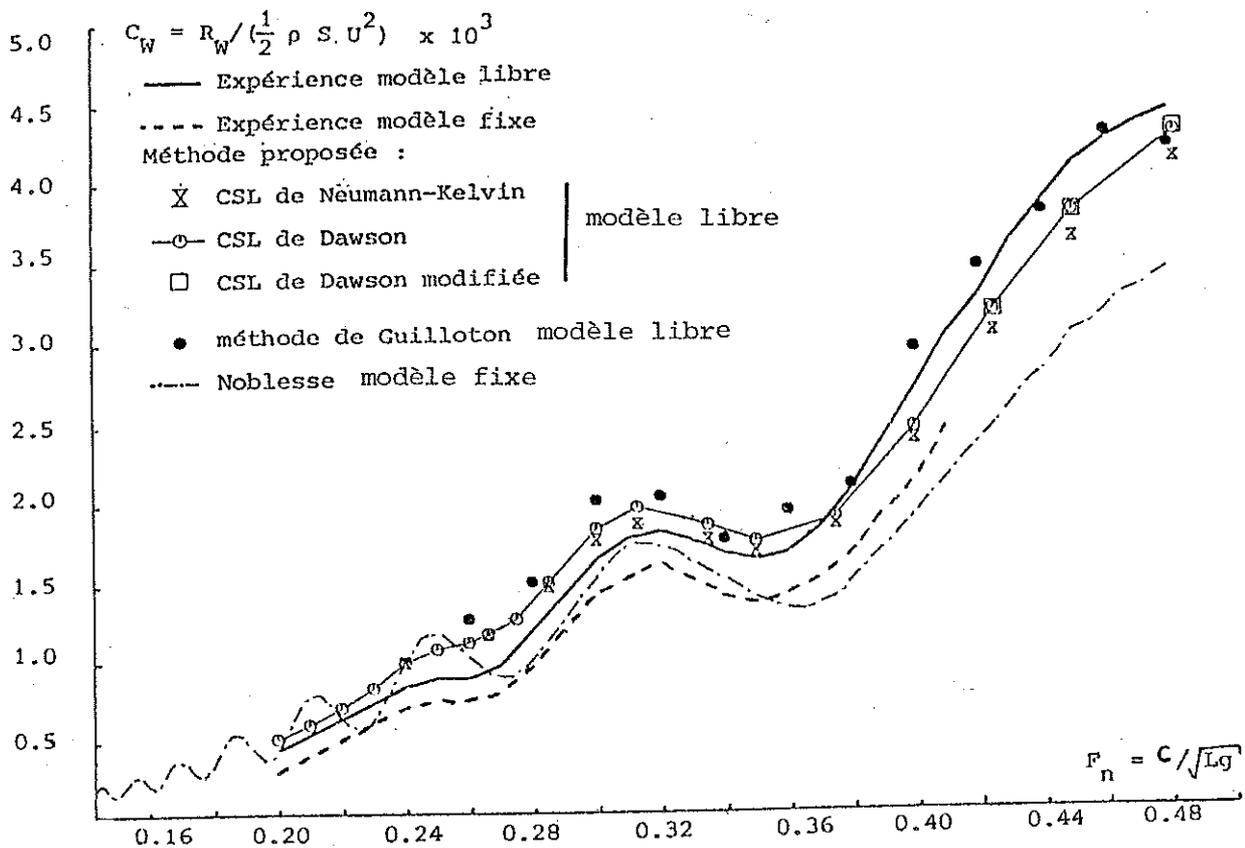
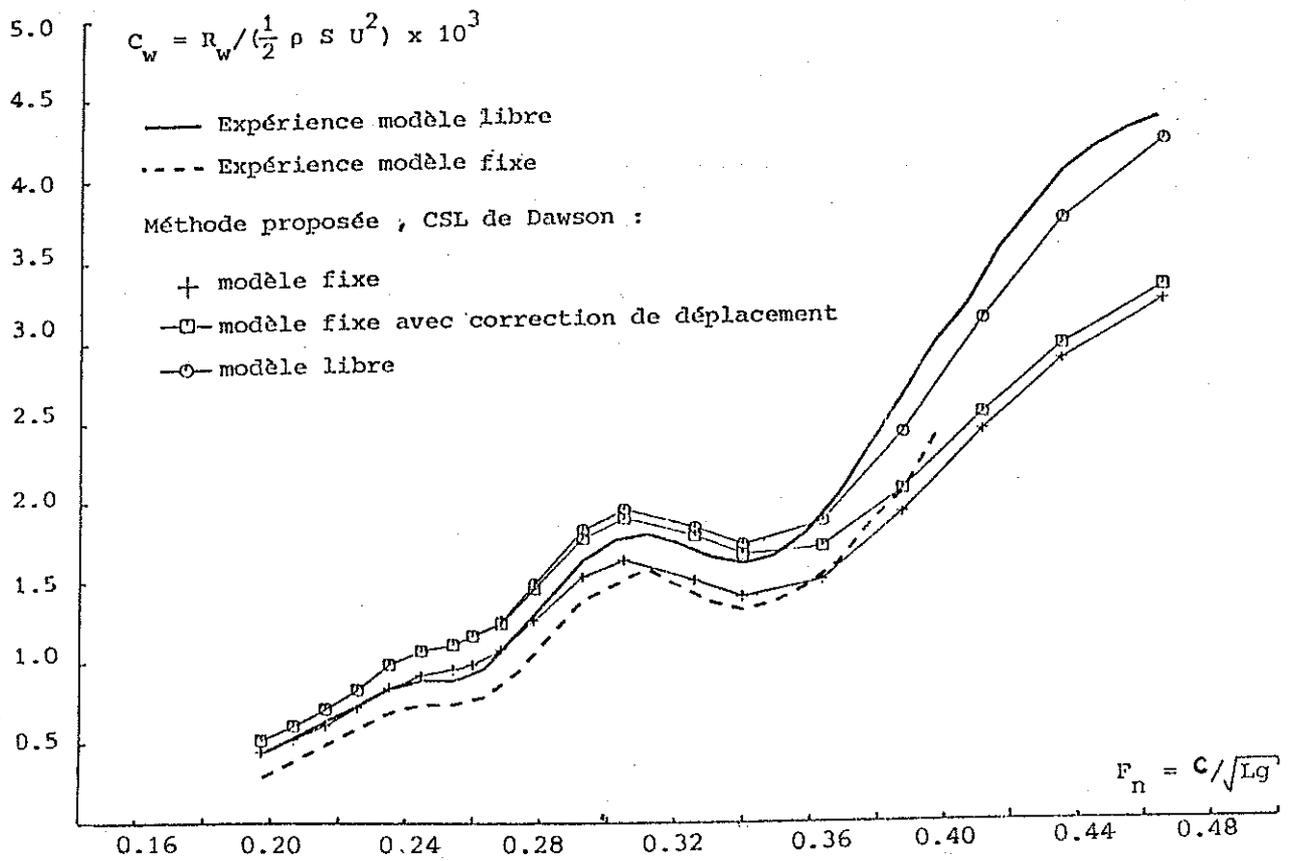


Planche 6.10

Déplacements de la carène de Wigley

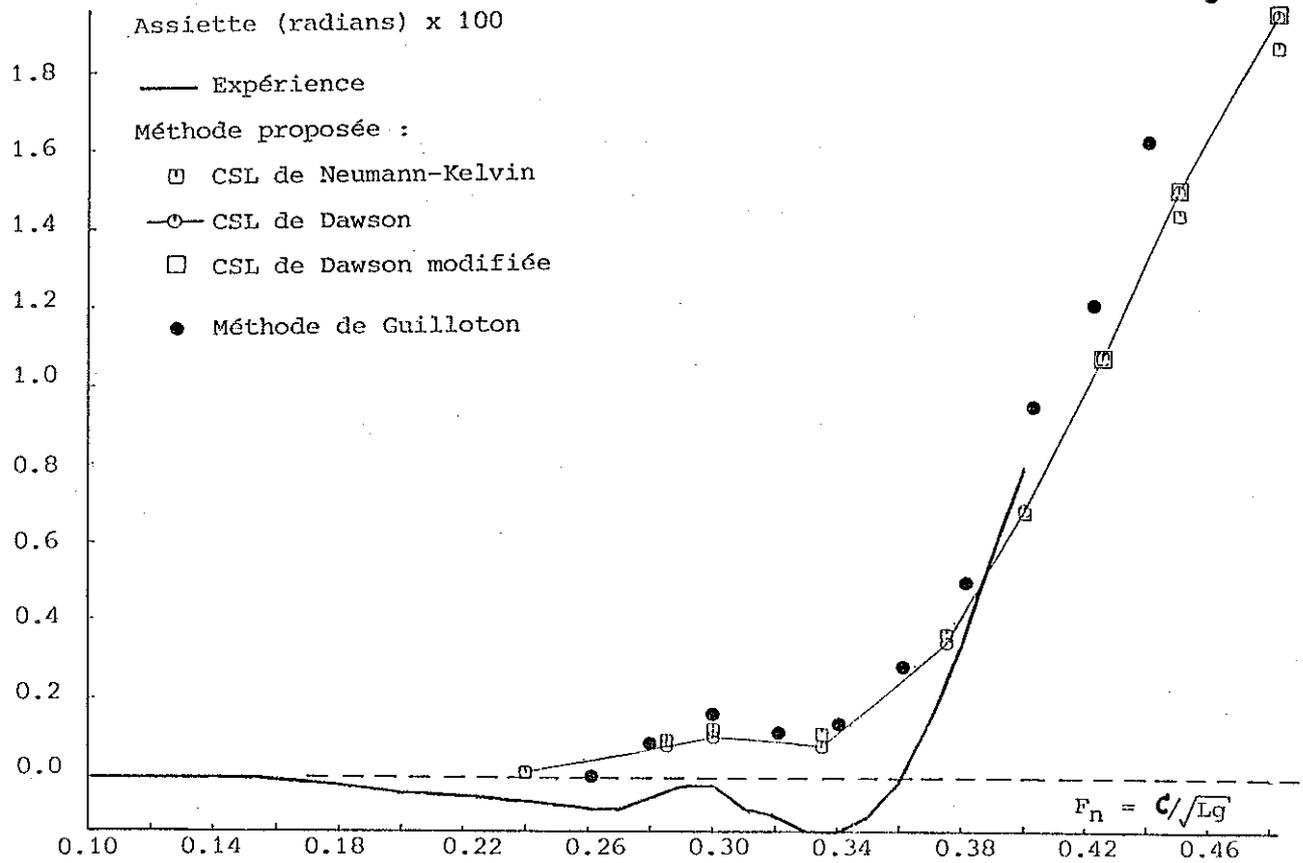
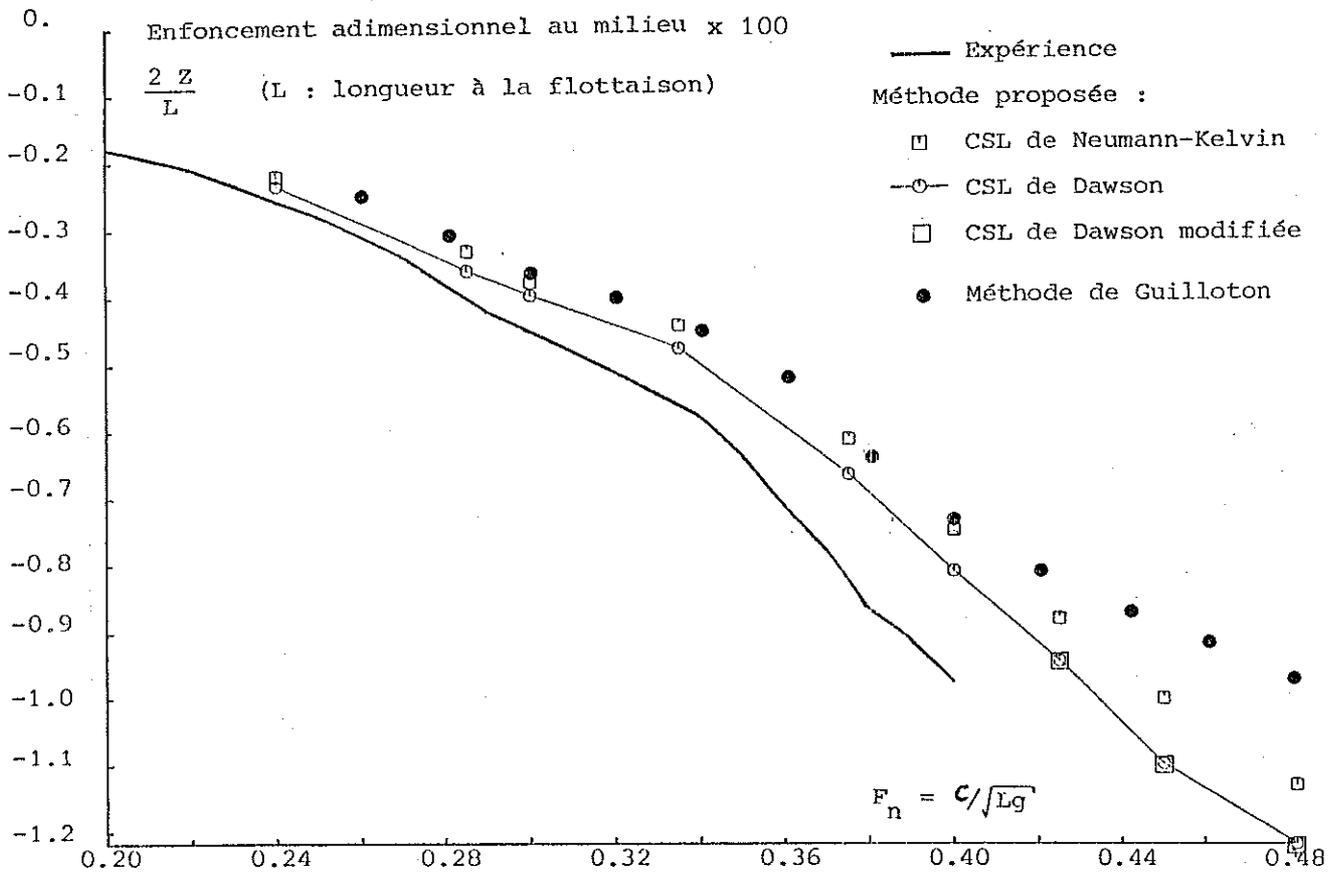


Planche 6.11

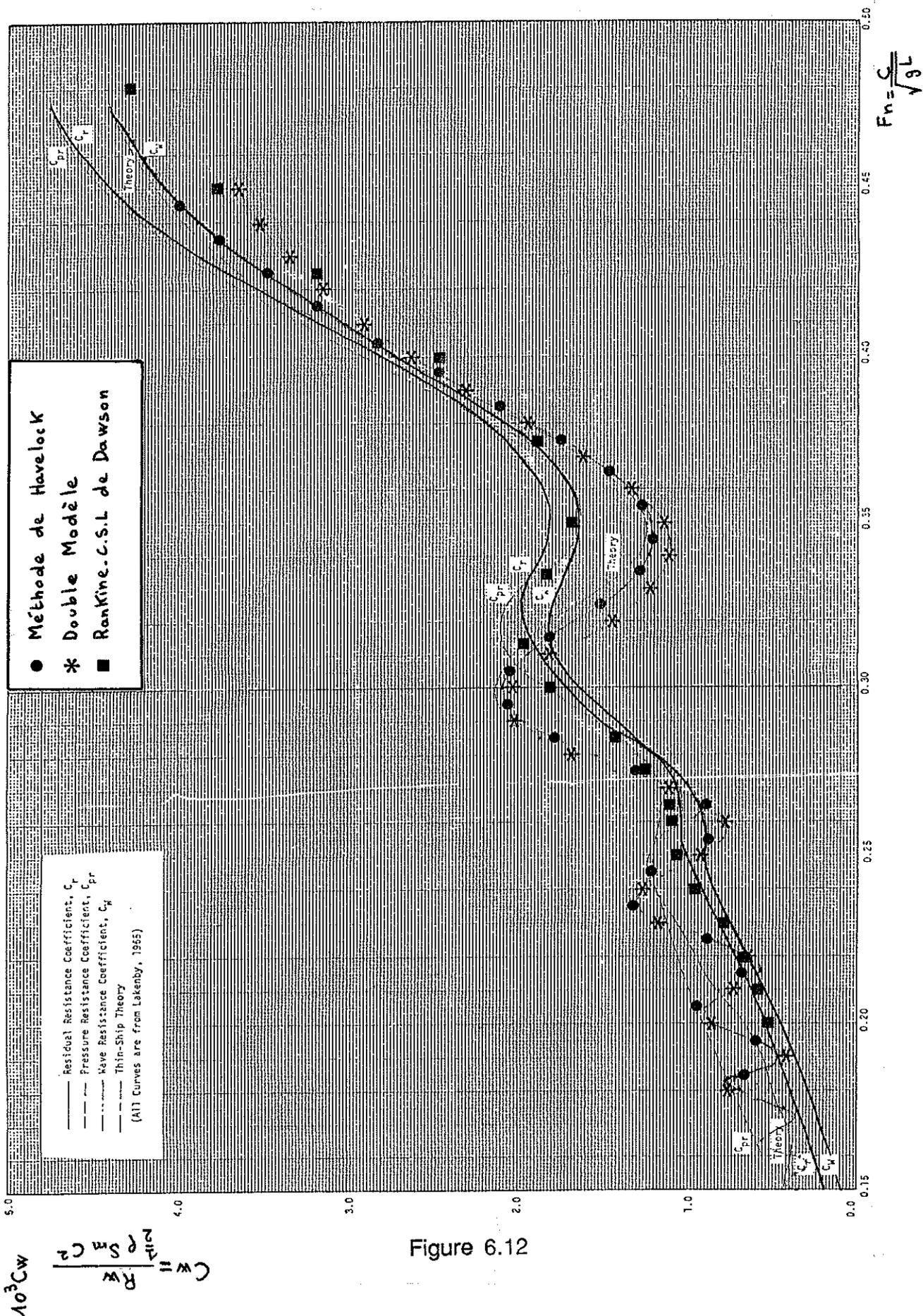


Figure 6.12

- Interprétation des résultats :

La première courbe montre l'importance du calcul itératif effectué en remaillant la carène déplacée pour des nombres de Froude supérieurs à 0,36. Pour les nombres de Froude inférieurs, une simple correction de déplacement dans le calcul de l'intégrale de ligne des formules (6.60) donne de bons résultats. Les trois formulations de la condition de surface libre donnent, pour cette carène qui est mince, des résultats très voisins. Nous préférons cependant la formulation de Dawson qui peut être étendue à des carènes non minces, alors que la condition de Dawson modifiée n'apporte pas ici d'amélioration sensible en augmentant considérablement les temps de calcul. Les résultats obtenus sont voisins de ceux de la méthode de Guilloton ce qui constitue un critère de bonne qualité pour une carène mince et ne présentent pas les oscillations de la théorie de Noblesse aux faibles nombres de Froude. Les valeurs de l'enfoncement et de l'assiette dynamique sont du même ordre de grandeur que celles de la méthode de Guilloton. L'accord avec les expériences est satisfaisant pour l'enfoncement et un peu moins bon pour l'assiette, mais les résultats restent significatifs. La connaissance précise des conditions d'essais en bassin et en particulier de la méthode utilisée pour entraîner la maquette permettrait peut-être d'améliorer ce point.

La comparaison avec les résultats des théories simplifiées montre une amélioration considérable de l'allure de la courbe qui ne présente plus de caractère exagérément oscillant. Les maximums et les minimums sont bien localisés et la courbe obtenue se situe à l'intérieur de l'enveloppe des incertitudes expérimentales dues au fait que la résistance de vagues n'est pas une quantité pouvant faire l'objet d'une mesure directe.

L'allure des champs de vagues aux différentes vitesses montre la diminution de l'angle que fait la première vague avec l'axe lorsque la vitesse augmente. Cet angle ne doit pas être confondu avec celui du dièdre de Kelvin ($19^{\circ}28'$) qui est l'angle de l'enveloppe des maximums des différentes vagues.

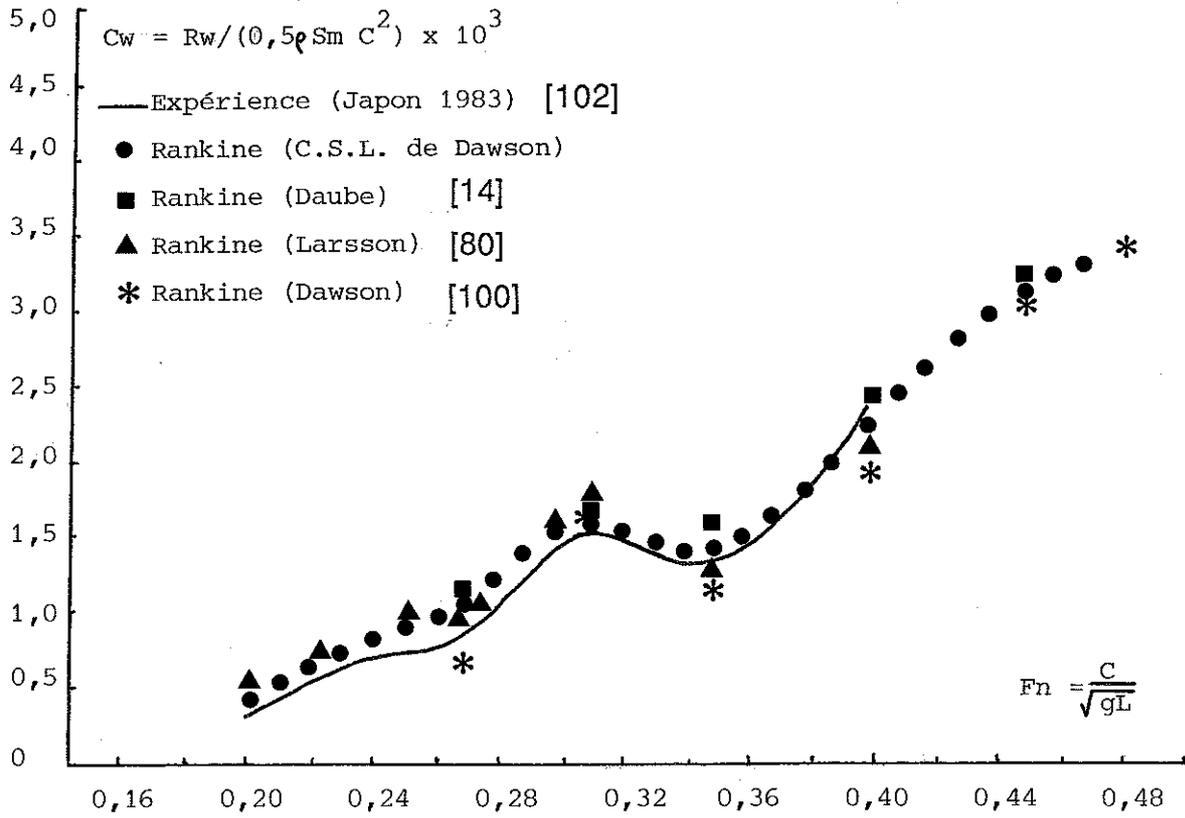
6.7.4. Comparaison avec d'autres méthodes de singularités de Rankine :

Nous allons maintenant comparer la méthode que nous avons utilisée aux autres méthodes de singularités de Rankine.

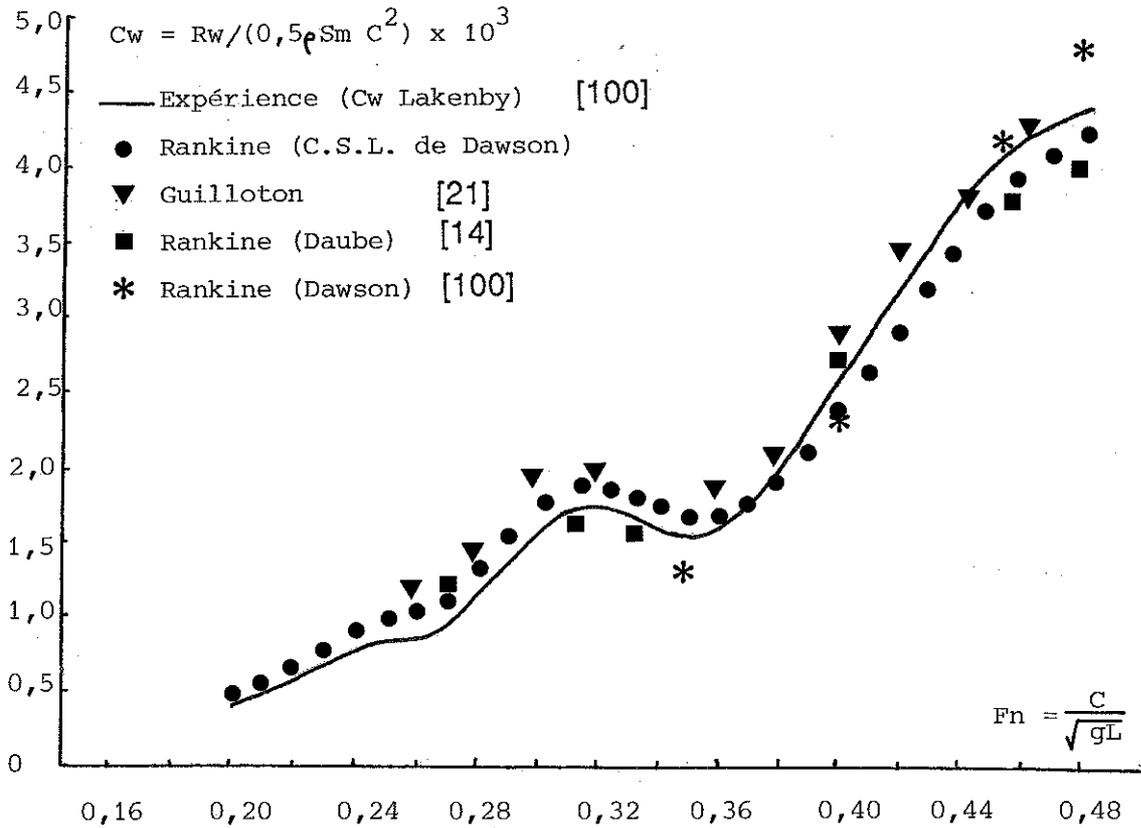
La première méthode opérationnelle est due à C.W. Dawson, en 1977 [18]. On lui doit, en particulier, le schéma de différences finies décentré amont à quatre points, une approximation de la condition de surface libre exacte et une estimation du découpage de la surface libre devant être utilisée avec ce type de méthode, ainsi que le maillage suivant les hyperboles. La différence principale avec la méthode que nous avons utilisée est l'initialisation du schéma de différences finies.

Par rapport à la méthode employée par O.Daube en 1980 [14], les différences sont plus importantes. O.Daube satisfait la condition de surface libre en calculant le potentiel des sources, puis il dérive celui-ci deux fois à l'aide d'un schéma décentré amont à 5 points, au lieu de calculer les vitesses et de les dériver une fois par un schéma à 4 points. De plus, au cours des itérations, il maille la déformée de la surface libre pour satisfaire la condition de surface libre exacte, ce qui pose parfois des problèmes de convergence.

CARENE DE WIGLEY - MODELE FIXE



CARENE DE WIGLEY - MODELE LIBRE



La méthode que nous avons employée est identique dans son principe à celle utilisée par L. Larsson [80].

Les différences que l'on peut observer sur la planche 6.14 par rapport aux résultats des auteurs cités précédemment sont dus essentiellement à la méthode de calcul de la résistance de vagues par intégration des pressions et au fait que l'on itère sur la position de la carène lorsque le modèle est libre. En particulier, C.W.Dawson, comme L.Larsson, intègre les pressions au second ordre sans tenir compte ni des déplacements de la carène, ni de l'intégrale de ligne au second ordre, et O.Daube tient compte de l'intégrale de ligne, mais en fixant l'assiette de la carène.

D'autres auteurs ont essayé récemment de prendre en compte des non-linéarités de surface libre par cette méthode. Les résultats obtenus jusqu'à présent ne sont pas décisifs et il semble que les meilleurs résultats soient encore ceux provenant de la méthode de Dawson avec initialisation du schéma suivant la technique de Mori comme nous l'avons proposé.

6.8. CONCLUSION :

Nous venons d'exposer la mise en oeuvre d'une méthode de calcul de la résistance de vagues à l'aide de singularités de Rankine. Comme on a pu le constater, cette méthode est rapide, bien adaptée aux calculateurs actuels scalaires et vectoriels, et efficace. Pour des corps immergés, elle permet de diviser les temps de calcul par un facteur de l'ordre de 10 si on la compare à la méthode des singularités de Kelvin, sans altérer la précision par rapport aux résultats analytiques et expérimentaux. Elle ne pose pas de problèmes supplémentaires autres que la bonne représentation physique de l'écoulement lorsque le corps coupe la surface libre. La seule difficulté réside dans la définition du maillage de la surface libre dont les règles commencent à être maîtrisées pour les carènes usuelles, et qui seront définies, dans les autres cas, à partir de bibliothèques de maillage spécifiques. Ces bibliothèques pourront être constituées en étudiant la convergence numérique des résultats en fonction du maillage, avec le concours des essais en bassin pour les cas nécessitant la prise en compte de paramètres supplémentaires (comme, par exemple, un tableau arrière immergé).

Un autre aspect intéressant de la méthode est la possibilité de traiter aisément des problèmes complexes comme les interactions entre carènes de multicoques, l'influence du fond et des parois, les profils portants, les coussins d'air, et des raffinements de la condition de surface libre.

En conclusion, cette méthode est celle qui donne actuellement les meilleurs résultats pour un coût raisonnable sans limitation d'emploi, avec, de plus, de nombreuses possibilités de développements.

CONCLUSION GENERALE :

Nous avons présenté la théorie de deux des grands problèmes classiques de l'hydrodynamique navale, ainsi que la mise en oeuvre de méthodes numériques de singularités permettant d'obtenir des solutions des problèmes discrétisés. Le problème de la tenue à la mer d'un ensemble de corps de positions moyennes fixes sollicités par une houle harmonique a été résolu à l'aide d'une méthode de singularités de Kelvin, les algorithmes numériques employés étant d'un emploi aisé sans problèmes particuliers, et les résultats en bon accord avec l'expérience. La même méthode, appliquée au problème de la résistance de vagues d'une carène avançant à vitesse constante en eau calme pose des problèmes numériques lorsque le corps coupe la surface libre. La méthode des singularités de Rankine constitue alors une alternative qui permet d'obtenir aisément une solution en bon accord avec l'expérience.

Les techniques numériques utilisées sont susceptibles d'être appliquées avec profit à d'autres problèmes d'hydrodynamique, ou d'un autre domaine, pouvant être résolus par la méthode des singularités.

Le code de calcul de diffraction-radiation AQUADYN qui a été décrit dans ce mémoire est actuellement d'un emploi courant dans les sociétés et organismes travaillant dans le domaine de l'ingénierie océanique. Nous espérons que le code de calcul de résistance de vagues REVA pourra, dans l'avenir, être aussi utile pour la conception et l'amélioration des formes de carènes.

C'est dans ce but que nous nous efforcerons de réaliser les futurs codes de calcul.

- ANNEXE 1 -

EQUATIONS GENERALES

I - NOTATIONS :

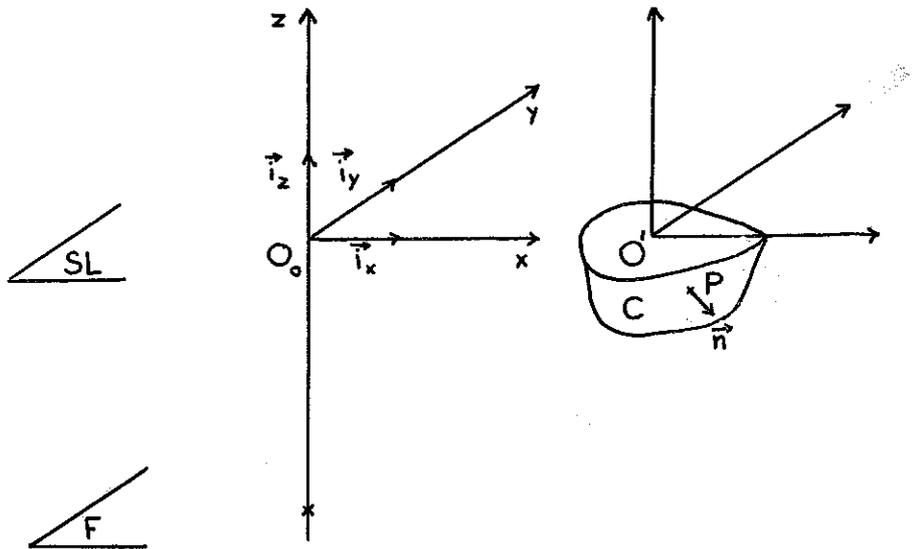


Figure A1.1

- D : domaine fluide.
- SL : surface libre.
- F : fond horizontal.
- C : surface solide étanche et indéformable (carène).
- P : point de la carène C.
- n : normale extérieure à la carène C en P.
- Φ : potentiel absolu des vitesses.
- $\vec{V} = \text{grad } \Phi$: vitesse dans le domaine fluide.
- λ_1, λ_2 : coefficients de viscosité de Lamé.
- ρ : masse volumique du fluide.
- ζ : déformée de la surface libre.
- p_a : pression atmosphérique.
- ϵ' : viscosité évanescence des fluides presque parfaits.

II HYPOTHESES CONCERNANT LES PROBLEMES D'HYDRO-DYNAMIQUE.

L'hypothèse fondamentale permettant de décrire le comportement d'un milieu fluide est l'hypothèse de continuité. Celle-ci revient à admettre que les fonctions décrivant le mouvement dans le mode de représentation d'Euler sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre à chaque instant en tout point du domaine fluide.

La traduction analytique des principes fondamentaux de la mécanique s'effectue en utilisant des hypothèses supplémentaires :

- Hypothèses H1 :

- Les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation (hypothèse du fluide Newtonien).

- Hypothèses H2 :

- Le milieu fluide est homogène et isotrope.
- Les coefficients de viscosité de Lamé sont des fonctions lentement variables de la masse volumique et de la température.

- Hypothèses H3 :

- Les coefficients de viscosité sont nuls.
- La masse volumique est constante et indépendante du temps.

- Hypothèses H4 :

- Les seules forces extérieures appliquées au fluide sont les forces de pesanteur qui dérivent d'un potentiel scalaire. Le fluide est initialement au repos.

- Hypothèses H5 :

- Dans le cas d'un écoulement à surface libre, on négligera les tensions superficielles et on supposera la pression constante au-dessus de la surface libre.

Les hypothèses H1 et H2 conduisent au fluide répondant aux équations de Navier-Stokes. En ajoutant les hypothèses H3, on obtient le modèle du fluide parfait isovolume dans lequel l'écoulement est irrotationnel pourvu qu'à l'instant initial le fluide soit au repos.

III EQUATIONS GENERALES :

- Principe de conservation de la masse :

Ce principe se traduit, dans le mode de représentation d'Euler, par l'équation de continuité :

$$(A1.1) \quad \text{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En fluide parfait isovolume, l'expression précédente se simplifie :

$$(A1.2) \quad \text{div} \vec{V} = 0$$

Si l'écoulement satisfait aux hypothèses H4, il est irrotationnel. Il existe donc une fonction scalaire Φ , appelée potentiel de l'écoulement telle que :

$$(A1.3) \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\Delta \Phi = 0$$

Le potentiel scalaire Φ est harmonique.

- Principe fondamental de la dynamique :

Ce principe se traduit, pour un fluide satisfaisant aux hypothèses H1 et H2, par l'équation de Navier-Stokes :

$$(A1.4) \quad \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - \gamma + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) + \frac{\lambda_2}{\rho} \Delta \vec{V}$$

L'accélération $\vec{\gamma}$ étant donnée, dans le mode de représentation d'Euler par la formule d'Helmholtz :

$$(A1.5) \quad \vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\text{Rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Si le fluide satisfait aux hypothèses H3 l'équation de Navier-Stokes dégénère en l'équation d'Euler :

$$(A1.6) \quad \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - \gamma$$

L'hypothèse H4 se traduit par :

$$(A1.7) \quad \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} U$$

avec $U = -gz$, l'axe Oz étant la verticale ascendante.

L'équation d'Euler admet alors comme intégrale première l'équation de Lagrange qui permet d'obtenir les pressions en un point quelconque du fluide :

$$(A1.8) \quad \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t)$$

IV CONDITIONS AUX LIMITES :

- Conditions sur les frontières solides imperméables :

Sur une frontière imperméable C, la composante normale de la vitesse doit être nulle:

$$(A1.9) \quad \vec{V}_R \cdot \vec{n} |_C = 0$$

En introduisant la vitesse \vec{V}_E d'un point lié au solide S, il vient :

$$(A1.10) \quad \vec{V} \cdot \vec{n} |_C = \vec{V}_E \cdot \vec{n} |_C$$

soit puisque $\vec{V} = \text{grad } \Phi$:

$$(A1.11) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} |_C = \vec{V}_E \cdot \vec{n} |_C$$

- Conditions de surface libre :

L'équation de la surface libre s'écrit : $z = \zeta(x,y,t)$

La première condition à satisfaire (condition de pression) consiste à écrire l'équation de Lagrange en remarquant qu'un point situé à la surface libre dans le domaine fluide est à la pression atmosphérique :

$$(A1.12) \quad gz = F(t) - \frac{p_a}{\rho} - \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) |_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Dans ce qui suit, la pression atmosphérique sera prise comme origine des pressions ($p_a = 0$).

La deuxième condition s'obtient en recourant à l'hypothèse de continuité de la position d'une surface fluide :

$$\frac{dp}{dt} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } p$$

En y remplaçant p par son expression issue de l'équation de Lagrange, on obtient finalement :

$$(A1.13) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} V^2 \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} = F'(t)$$

- Condition de radiation :

La condition de radiation est une condition supplémentaire rendue nécessaire par le fait que le problème mathématique à résoudre n'admet pas toujours une solution unique. Cette condition exprime que le comportement à l'infini du fluide est bien conforme à la réalité physique du problème posé. Une méthode pratique, due à Rayleigh et utilisée par H. Lamb [79], qui permet de tenir compte de cette condition lors des calculs consiste à formuler l'hypothèse des fluides "presque parfaits" où l'on ajoute au second membre de l'équation d'Euler un terme dissipatif $-2 \varepsilon' \vec{V}$, ε' étant un infiniment petit essentiellement positif que l'on fera tendre vers zéro tous calculs effectués.

L'équation d'Euler s'écrit donc :

$$(A1.14) \quad \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} (\vec{F} - \gamma - 2 \varepsilon' \vec{V})$$

L'équation de Lagrange devient :

$$(A1.15) \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2 \varepsilon' \Phi \right) = F(t)$$

et les conditions de surface libre des fluides "presque parfaits" :

$$(A1.16) \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{V^2}{2} + 2 \varepsilon' \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2 \varepsilon' V^2 \right) \Big|_{z=\zeta(x,y,t)} = F'(t)$$

avec :

$$(A1.17) \quad \zeta = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0^+} \frac{1}{g} \left[- \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{V^2}{2} - 2 \varepsilon' \Phi + F(t) \right]$$

- Grandeurs absolues exprimées dans un repère mobile :

Les conditions aux limites précédentes peuvent être écrites dans des repères mobiles dont les axes sont parallèles à ceux du repère absolu et dont l'origine O' est animée d'un mouvement de vitesse V_0 . Dans ce cas, la dérivation partielle par rapport au temps sera donnée par la formule :

$$(A1.18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{repère fixe}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\text{repère mobile}} - \vec{V}_0 \cdot \vec{\text{grad}} \Big|_{\text{repère mobile}}$$

Les dérivations par rapport aux variables d'espace étant effectuées de la même façon que dans le repère fixe.

V SIMILITUDE :

La similitude des écoulements de fluides parfaits soumis à la pesanteur en présence d'une surface libre oblige à respecter le nombre de Reech-Froude de l'écoulement défini par :

$$F = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Si l'on considère deux fluides de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , les échelles des longueurs étant L_1 et L_2 , en présence de champs de pesanteur g_1 et g_2 , le respect de cette loi conduit à écrire la similitude des vitesses dans le fluide :

$$\text{vitesse : } \frac{V_1}{\sqrt{g_1 L_1}} = \frac{V_2}{\sqrt{g_2 L_2}}$$

On en déduit les similitudes des grandeurs fondamentales, masse (M) et temps (T):

$$\text{masse : } \frac{M_1}{\rho_1 L_1^3} = \frac{M_2}{\rho_2 L_2^3}$$

$$\text{temps : } \frac{1}{T_1} \sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = \frac{1}{T_2} \sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

et, pour les principales autres grandeurs :

$$\text{déplacement : } \frac{X_1}{L_1} = \frac{X_2}{L_2}$$

$$\text{accélération : } \frac{\gamma_1}{g_1} = \frac{\gamma_2}{g_2}$$

$$\text{force : } \frac{F_1}{\rho_1 g_1 L_1^3} = \frac{F_2}{\rho_2 g_2 L_2^3}$$

Tous les calculs effectués pour un écoulement dans un fluide défini par (ρ , L , g) seront valables pour un fluide en similitude. En particulier, si la masse volumique et la pesanteur sont les mêmes, cette loi donne le comportement des grandeurs en fonction des échelles géométriques.

La représentation des grandeurs sous forme adimensionnelle permet de s'affranchir des caractéristiques du fluide.

- ANNEXE 2 -

PRINCIPE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME A SURFACE LIBRE PAR
UNE METHODE DE SINGULARITES.

I NOTATIONS :

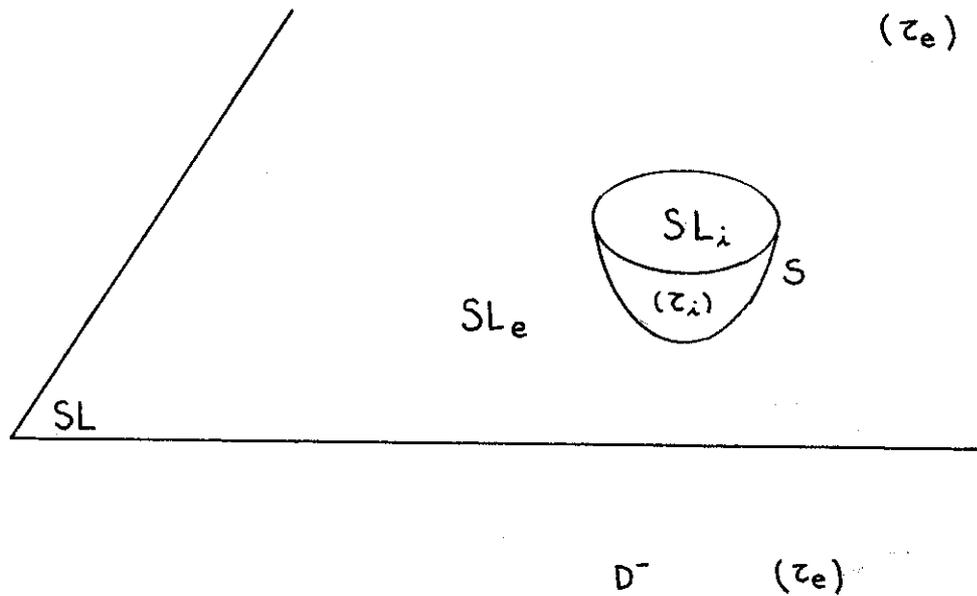


Figure A2.1

- M' : point influençant
- M : point influencé
- τ_i : domaine intérieur
- S : surface limitant un domaine τ_i
- τ_e : domaine extérieur complémentaire du domaine τ_i
- D^- : domaine $z < 0$
- SL : plan de la surface libre situé dans le domaine fluide ($z = 0^-$)
- SL_e : partie du plan de la surface libre située à l'extérieur de la carène
- SL_i : partie du plan de la surface libre située à l'intérieur de la carène.

II POSITION DU PROBLEME - METHODE DE RESOLUTION

Les problèmes d'hydrodynamique linéarisés posés habituellement se ramènent à la recherche d'un potentiel vérifiant :

$$(A2.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{Equation de continuité dans } D^- \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_S = \vec{V}_E \cdot \vec{n} \Big|_S & \text{Condition de glissement sur } S \\ E\Phi \Big|_{SL} = 0 & \text{Condition de surface libre linéarisée} \\ & \text{affichée dans le plan } z=0 \end{array} \right.$$

La déformée de la surface libre étant obtenue après résolution du problème précédent par :

$$(A2.2) \quad \zeta = - \frac{1}{g} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Le problème ainsi posé admet, pour des corps entièrement immergés de géométrie particulière, des solutions analytiques sous forme de série.

La méthode que nous allons mettre en oeuvre pour résoudre ce type de problème est la méthode des singularités. Cette méthode permet de traiter l'écoulement tridimensionnel autour d'un corps de forme quelconque en remplaçant celui-ci par une distribution superficielle de singularités cinématiquement équivalente. Pour une carène donnée, il existe une infinité de distributions superficielles de singularités cinématiquement équivalentes, chaque distribution étant obtenue en résolvant une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Nous avons choisi trois types de distribution :

- la distribution de sources.
- la distribution de doublets.
- la distribution mixte de Green.

III REPRESENTATION D'UN CHAMP SCALAIRE HARMONIQUE PAR UNE DISTRIBUTION DE SINGULARITES:

III.1. Définition des potentiels de surface [4] :

- potentiel de sources :

Soit S une surface, $\sigma(M',t)$ une fonction continue, définie sur S et M un point extérieur à S . Le potentiel induit en M par la distribution de sources de densité $\sigma(M',t)$ est défini par :

$$(A2.3) \quad \Phi(M,t) = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma(M',t)}{MM'} dS(M')$$

- potentiel de doublets normaux :

Considérons une distribution superficielle de doublets de moment $\vec{\mu} = \mu(M',t) \cdot \vec{n}_{M'}$.
Le potentiel induit en M par la distribution superficielle de doublets normaux $\mu(M',t)$ s'écrit :

$$(A2.4) \quad \Phi(M,t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M')$$

III.2 Intégrale de Stieltjes [41] :

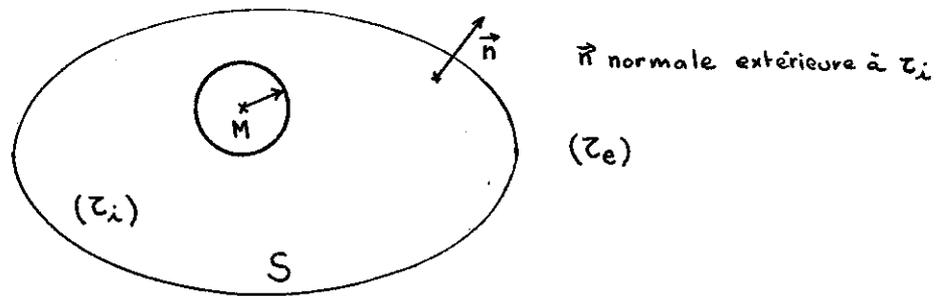


Figure A2.2

Si la surface S admet partout un plan tangent, en entourant M par une sphère dont on fait tendre le rayon vers zéro, on a les identités suivantes :

$$(A2.5) \quad \iiint_{\tau_i} \Delta_{M'} \left(\frac{1}{MM'} \right) d\tau(M') = \begin{cases} -4\pi & M \in \tau_i \\ -2\pi & M \in S \\ 0 & M \in \tau_e \end{cases}$$

Ces résultats se généralisent pour une fonction $f(M,t)$:

$$(A2.6) \quad \iiint_{\tau_i} f(M',t) \Delta_{M'} \left(\frac{1}{MM'} \right) d\tau(M') = \begin{cases} -4\pi f(M,t) & M \in \tau_i \\ -2\pi f(M,t) & M \in S \\ 0 & M \in \tau_e \end{cases}$$

III.3. Formules de Green :

Pour un domaine τ , limité par une surface S , \vec{n} étant la normale extérieure, la première formule de Green ou formule d'Ostrogradsky s'écrit :

$$(A2.7) \quad \iiint_{\tau} \operatorname{div} \vec{V} \, d\tau = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

En appliquant cette formule au vecteur \vec{V} défini par :

$$\vec{V} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i}_x + \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{i}_y + \phi \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{i}_z \quad , \phi \text{ et } \psi \text{ étant des fonctions de } x, y, z, t$$

On a :

$$\iiint_{\tau} (\phi \Delta \psi + \vec{\operatorname{grad}} \phi \cdot \vec{\operatorname{grad}} \psi) \, d\tau = \iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS$$

En permutant ϕ et ψ , et en soustrayant les deux égalités, on obtient la deuxième formule de Green :

$$(A2.8) \quad \iiint_{\tau} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) \, d\tau = \iint_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) \, dS$$

III.4. Troisième formule de Green :

Soit un champ scalaire $\Phi(M,t)$ défini dans un domaine τ_1 , la troisième formule de Green s'obtient à partir des résultats précédents, $\vec{n}_{M'}$ étant la normale extérieure à la surface S et τ_e le complémentaire de τ_1 .

$$(A2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_1 \quad \Phi(M,t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi(M,t)}{2} \\ M \in \tau_e \quad 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\tau_1} \Delta_{M'} \Phi(M',t) \frac{1}{MM'} \, d\tau(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} \, dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} \, dS(M') \end{array} \right.$$

III.5. Discontinuités des distributions superficielles :

En tout point de la surface S admettant un plan tangent, considérons 3 points infiniment voisins : $M_i \in \tau_i$, $M \in S$, $M_e \in \tau_e$, avec \vec{n} , normale extérieure à τ_i et $\vec{\ell}$, vecteur unitaire tangent à la surface S .

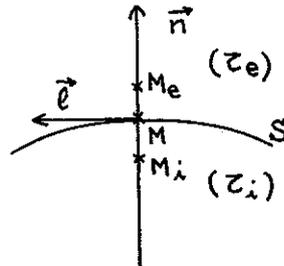


Figure A2.3

A partir des résultats précédents, on démontre que les distributions de sources et de doublets normaux réparties sur S possèdent les propriétés suivantes :

- Pour une distribution de sources :

$$(A2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(M_e, t) - \Phi(M, t) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M_e, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M_i, t) = \frac{\sigma(M, t)}{2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M_e, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M_i, t) = 0 \end{array} \right.$$

- Pour une distribution de doublets normaux :

$$(A2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(M_e, t) - \Phi(M, t) = -\frac{\mu(M, t)}{2} \\ \Phi(M, t) - \Phi(M_i, t) = -\frac{\mu(M, t)}{2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M_e, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M_i, t) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M_e, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M, \tau) = -\frac{\partial \mu(M, t)}{2 \partial \ell} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial \ell}(M_i, t) = -\frac{\partial \mu(M, t)}{2 \partial \ell} \end{array} \right.$$

III.6 Fonction harmonique régulière :

Une fonction harmonique ϕ , définie et uniforme à l'intérieur d'un domaine D limité par une surface S est régulière si elle admet :

- des dérivées premières continues dans D et sur S .
- des dérivées secondes continues dans D et bornées sur S .

Une fonction harmonique, régulière dans un domaine extérieur, doit être nulle à l'infini.

III.7 Fonctions harmoniques dans un domaine intérieur τ_i :

Si la fonction est harmonique, on a : $\Delta_M \Phi(M,t) = 0$

de sorte que l'intégrale de volume de la formule (A2.9) disparaît. Il vient alors :

$$(A2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_i \quad \Phi(M,t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi(M,t)}{2} \\ M \in \tau_e \quad 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \end{array} \right.$$

Il convient de remarquer que la distribution superficielle de singularités de densités $\sigma(M',t) = -\frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}}$ et $\mu(M',t) = \Phi(M',t)$ définit le potentiel aussi bien dans le domaine τ_i que dans le domaine τ_e .

III.8. Fonctions harmoniques dans un domaine extérieur τ_e :

Si le domaine extérieur τ_e est infini, il faut, pour pouvoir appliquer les résultats précédents, entourer le corps par une sphère Σ centrée à l'origine et dont on fait tendre le rayon R vers l'infini. Si l'on appelle \vec{n} la normale extérieure au domaine τ' compris entre S et Σ (normale intérieure à τ_i), on peut appliquer la formule (A2.12) dans le domaine intérieur τ' :

$$(A2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau' \quad \Phi(M,t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi(M,t)}{2} \\ M \in \tau_1 \quad 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \end{array} \right.$$

Les intégrales sur Σ se calculent en utilisant le fait qu'une fonction harmonique, régulière et nulle à l'infini, tend vers zéro au moins comme $1/R$, on démontre alors que les intégrales sur Σ s'annulent lorsque R tend vers l'infini. On obtient la formule suivante :

$$(A2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \Phi(M,t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi(M,t)}{2} \\ M \in \tau_1 \quad 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial \Phi(M',t)}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \end{array} \right.$$

La normale $\vec{n}_{M'}$, est la normale extérieure à τ_e , donc intérieure à τ_1 .

III.9. Représentation d'un champ scalaire harmonique par une distribution de singularités :

Nous voulons résoudre un problème extérieur dans un domaine τ_e limité par une surface S . Si \vec{n} désigne la normale extérieure à τ_1 (intérieure à τ_e), on a :

$$\sigma_e(M',t) = \frac{\partial \Phi_e(M',t)}{\partial n_{M'}} \Big|_S \quad \text{et} \quad \mu_e(M',t) = - \Phi_e(M',t) \Big|_S$$

La distribution de singularités solution du problème extérieur n'est pas unique. En effet, si l'on considère un champ harmonique arbitraire $\Phi_i(M,t)$ défini dans τ_1 , ce champ pourra être représenté par :

$$\sigma_i(M',t) = - \frac{\partial \Phi_i(M',t)}{\partial n_{M'}} \Big|_S \quad \text{et} \quad \mu_i(M',t) = \Phi_i(M',t) \Big|_S$$

Ces distributions induisent un potentiel identiquement nul dans τ_e , l'expression du potentiel Φ_e ne sera donc pas modifiée par la superposition des deux distributions :

La distribution :

$$\sigma(M',t) = \left[\frac{\partial \Phi_e(M',t)}{\partial n_{M'}} - \frac{\partial \Phi_i(M',t)}{\partial n_{M'}} \right] \Big|_S \quad \text{et} \quad \mu(M',t) = - \left[\Phi_e(M',t) - \Phi_i(M',t) \right] \Big|_S$$

permet de résoudre également le problème extérieur.

La troisième formule de Green s'écrit alors :

$$(A2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \Phi_e(M,t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi_e(M,t) + \Phi_i(M,t)}{2} \\ M \in \tau_i \quad \Phi_i(M,t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M',t) \frac{1}{MM'} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \end{array} \right.$$

IV EQUIVALENCE CINEMATIQUE ENTRE UN SOLIDE EN MOUVEMENT DANS UN FLUIDE ILLIMITE ET UNE DISTRIBUTION DE SINGULARITES :

IV.1. Position du problème :

Le problème consiste à trouver un potentiel Φ régulier à l'infini, et vérifiant les conditions suivantes :

$$(A2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \tau_e \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = \vec{V}_E(M,t) \cdot \vec{n}_M \Big|_S \end{array} \right.$$

\vec{n} étant la normale intérieure au domaine τ_e .

Ce problème est un problème de Neumann extérieur dont la solution est unique. Si l'on suppose que la fonction $\vec{V}_E(M,t)$ est périodique, on peut la représenter par son développement sur une base de fonctions du temps (par exemple en série de Fourier). On a alors :

$$\vec{V}_E(M,t) = \sum_{j=1}^N \vec{V}_E^j(M) \cdot f_j(t)$$

Les opérateurs Δ et $\partial/\partial n$ ne portant que sur les variables d'espace, le problème posé se décompose en une somme de problèmes élémentaires découplés :

$$\begin{cases} \Delta \Phi^j \cdot f_j(t) = 0 \\ \frac{\partial \Phi^j}{\partial n} \cdot f_j(t) |_S = \vec{V}_E^j(M) \cdot f_j(t) \cdot \vec{n}_M |_S \end{cases}$$

Si l'on s'intéresse à un problème élémentaire, la troisième formule de Green s'écrit, en omettant l'indice j :

$$(A2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \quad \Phi_e(M,t) f(t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi_e(M,t) + \Phi_i(M,t)}{2} f(t) \\ M \in \tau_i \quad \Phi_i(M,t) f(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right)_{M'} \frac{f(t)}{MM'} dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi_e - \Phi_i)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{f(t)}{MM'} dS(M') \end{array} \right.$$

IV.2. Distribution mixte de Green :

Si l'on choisit le champ intérieur $\Phi_i \equiv 0$, la distribution de sources est donnée par :

$$(A2.18) \quad \sigma(M,t) = \sigma(M) f(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial n} |_M = \vec{V}_E \cdot \vec{n}_M \cdot f(t) |_S$$

La seule inconnue du problème est la distribution de doublets normaux.

IV.3. Elimination des sources, distribution de doublets normaux :

Pour éliminer les sources, nous devons considérer un champ intérieur solution de:

$$\begin{cases} \Delta \Phi_i = 0 & \text{dans } \tau_i \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_M} |_S = \frac{\partial \Phi_e}{\partial n_M} |_S = \vec{V}_E(M) \cdot \vec{n}_M \cdot f(t) |_S \end{cases}$$

Ce problème aux limites admet des solutions dans des cas particuliers. Par exemple, pour un mouvement de translation parallèle à Ox :

$$\Phi_i = C x f(t) |_S + cte$$

La distribution de doublets sera déterminée à une constante près par :

$$(A2.19) \quad \mu(M,t) = \mu(M) \cdot f(t) = -(\Phi_e - C \times f(t))|_S$$

IV.4. Elimination des doublets normaux, distribution de sources :

La distribution de doublets figurant dans la troisième formule de Green peut être éliminée en considérant un potentiel Φ_i solution de :

$$\begin{cases} \Delta\Phi_i = 0 & \text{dans } \tau_i \\ \Phi_i(M,t)|_S = \Phi_e(M,t)|_S \end{cases}$$

Le champ Φ_e n'est connu sur S qu'après résolution du problème, il en est de même de Φ_i . Cependant, on sait que le champ Φ_i existe et qu'il est unique, puisque le problème posé est un problème de Dirichlet intérieur qui est régulier.

La distribution de sources est alors déterminée par :

$$(A2.20) \quad \sigma(M,t) = \sigma(M) \cdot f(t) = \frac{\partial}{\partial n_M} [\Phi_e(M,t) - \Phi_i(M,t)] = \vec{V}_E(M) \cdot \vec{n}_M \cdot f(t) - \frac{\partial\Phi_i(M,t)}{\partial n_M}$$

IV.5. Equations intégrales du problème :

Les équations intégrales du problème sont obtenues à partir de la troisième formule de Green, compte tenu des discontinuités des distributions. La condition à satisfaire est la condition de glissement sur la face extérieure de S, dans le domaine τ_e . Celle-ci peut être écrite, soit directement, soit indirectement en mettant à profit les propriétés de la solution du problème intérieur. Le choix entre ces deux possibilités sera effectué de telle sorte qu'on obtienne une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce dont la résolution numérique ne présente pas de difficulté.

- Distribution mixte de Green :

La normale étant extérieure à τ_i , on a : $\mu(M,t) = -[\Phi_e(M,t) - \Phi_i(M,t)]$

Le champ Φ_i étant identiquement nul pour $M \in \tau_i$, on écrit la formule de Green (A2.17) pour $M \in S$. L'équation intégrale permettant de déterminer la distribution inconnue $\mu(M,t) = \mu(M) \cdot f(t)$ s'écrit :

$$(A2.21) \quad \frac{\mu(M) \cdot f(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{f(t)}{MM'} dS(M') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M') \cdot \frac{f(t)}{MM'} dS(M')$$

- Distribution de doublets normaux (mouvement de translation seulement) :

Le champ Φ_i est connu, on a : $\Phi_i = C x f(t)$. On écrit donc (A2.17) pour $M \in S$ en remarquant que :

$$\frac{\Phi_e + \Phi_i}{2} = \frac{\Phi_e - \Phi_i}{2} + \Phi_i = - \frac{\mu(M) \cdot f(t)}{2} + C x f(t)$$

L'équation intégrale s'écrit alors :

$$(A2.22) \quad \frac{\mu(M) \cdot f(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{f(t)}{MM'} dS(M') = C x f(t) |_M$$

Cette distribution peut être employée chaque fois que l'on connaît explicitement la solution de problème intérieur. Son emploi est néanmoins limité ; en particulier, on ne connaît pas la solution lorsque le corps effectue des mouvements de rotation.

- Distribution de sources :

Si l'on prend la dérivée normale en M des deux membres de la formule (A2.17) écrite pour $M \in S$ il vient :

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \frac{\Phi_e(M) + \Phi_i(M)}{2} f(t) = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M') f(t) \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{1}{MM'} dS(M')$$

avec : $\frac{\partial}{\partial n_M} = \vec{n}_M \cdot \text{grad}_M$

compte tenu de :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_e(M)}{\partial n_M} + \frac{\partial \Phi_i(M)}{\partial n_M} \right] f(t) = - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_e(M)}{\partial n_M} - \frac{\partial \Phi_i(M)}{\partial n_M} \right] f(t) + \frac{\partial \Phi_e(M)}{\partial n_M} f(t)$$

L'équation intégrale donnant la distribution de sources s'écrit :

$$(A2.23) \quad \frac{\sigma(M) \cdot f(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{f(t)}{MM'} dS(M') = \vec{V}_E(M) \cdot \vec{n}_M \cdot f(t)$$

On peut remarquer que la solution du problème de Neumann extérieur étant unique, le potentiel extérieur devra être le même quelle que soit la distribution de singularités utilisée. Les singularités définies précédemment sont parfois appelées singularités de Rankine ou singularités ordinaires.

V DISTRIBUTION DE SINGULARITES CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTE AU PROBLEME AVEC SURFACE LIBRE POUR UNE CARENE IMMERGEE :

Avec les notations définies en I, le problème avec surface libre consiste à trouver un potentiel $\Phi(M,t)$ vérifiant :

$$(A2.24) \quad \begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \tau_e \cap D^- \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_S = \vec{V}_E(M,t) \cdot \vec{n}_M \Big|_S \\ E\Phi \Big|_{SL} = 0 \end{cases}$$

E étant l'opérateur condition de surface libre écrit dans le domaine fluide SL $\subset D^-$. Si la fonction $\vec{V}_E(M,t)$ est périodique, on a comme précédemment :

$$\vec{V}_E(M,t) = \sum_{j=1}^N \vec{V}_E^j(M) \cdot f_j(t)$$

Cette fois ci, l'opérateur E réalise un couplage entre les variables d'espace et de temps. Le potentiel s'écrit sous la forme :

$$\Phi(M,t) = \sum_{j=1}^N \Phi^j(M) \cdot f_j(t)$$

V.1. Fonction de Green :

Considérons une fonction $g(M, M', t)$ harmonique et régulière par rapport à M' pour $M' \in D^-$, M étant un point fixe quelconque appartenant à D^- . La formule de Green s'écrit, pour un domaine fluide limité par une surface S :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} [\Phi(M',t) \Delta_{M'} g(M,M',t) - g(M,M',t) \Delta_{M'} \Phi(M',t)] d\tau(M') = \\ & \iint_S [\Phi(M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} g(M,M',t) - g(M,M',t) \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \Phi(M',t)] dS(M') = 0 \end{aligned}$$

pour $M' \in D^-$, on a $\Delta_{M'} g(M,M',t) = 0$ et $\Delta_{M'} \Phi(M',t) = 0$ pour $M' \in \tau_e \cap D^-$.

En écrivant cette formule pour le potentiel extérieur dans le domaine extérieur à S, limité par la surface libre SL et la surface à l'infini Σ , et si l'on suppose, ce qu'il faudra

vérifier par la suite, que les intégrales sur ces deux dernières surfaces sont nulles ; et en ajoutant la même formule pour le potentiel intérieur à S, il vient, pour la composante fonction de $f_j(t)$:

$$(A2.25) \left\{ \begin{array}{l} M \in \tau_e \cap D^- \quad \Phi_e^j(M) f_j(t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi_e^j(M) + \Phi_i^j(M)}{2} f_j(t) \\ M \in \tau_i \quad \Phi_i^j(M) f_j(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \Phi_e^j}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial n} \right)_{M'} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi_e^j - \Phi_i^j)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') \end{array} \right.$$

La condition de surface libre $E \Phi(M, t) = 0$ écrite pour $M \in SL$, c'est-à-dire $M \in \tau_e \cap D^-$ est linéaire. On a :

$$E \Phi(M, t) |_{SL} = \sum_{j=1}^N E \Phi^j(M) \cdot f_j(t) |_{SL} = 0$$

il faut donc :

$$E \Phi^j(M) \cdot f_j(t) |_{SL} = 0$$

En posant :

$$\mathcal{G}_j(M, M', t) = \frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t)$$

on a :

$$E \Phi^j(M) \cdot f_j(t) |_{SL} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \Phi_e^j}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial n} \right)_{M'} E \mathcal{G}_j(M, M', t) |_{SL} dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi_e^j - \Phi_i^j)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} E \mathcal{G}_j(M, M', t) |_{SL} dS(M') \end{array} \right.$$

puisque l'opérateur E n'est fonction que de M.

Cette condition est manifestement satisfaite si $E \mathcal{G}_j(M, M', t) |_{SL} = 0$ ce qui rend nécessaire l'existence des dérivées de $\mathcal{G}_j(M, M', t)$ pour $M \in SL$ et $M' \in S$.

Si l'on peut trouver une fonction $g_j(M, M', t)$ remplissant les conditions d'harmonicité et telle que $E \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] |_{SL} = 0$, le problème avec surface libre se présente comme un problème de Neumann extérieur. Les distributions de singularités cinématiquement équivalentes à la carène s'obtiennent à partir de l'équation (A2.26).

La fonction $\mathcal{G}_j(M, M', t) = \frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t)$ est la fonction de Green relative au problème pour la composante $f_j(t)$. Cette fonction peut être décomposée sur la base de fonctions du temps précédente. On a alors à résoudre N problèmes élémentaires couplés par la fonction de Green.

V.2. Equations intégrales :

La fonction $\mathcal{G}_j(M, M', t)$ étant supposée connue, les équations intégrales s'obtiennent à partir de (A2.25). Ces équations s'écrivent, pour la composante en $f_j(t)$:

- Distribution mixte de Green :

$$(A2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu_j(M) \cdot f_j(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu_j(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') = \\ \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{V}_E \cdot \vec{n} |_{M'} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') \end{array} \right.$$

- Distribution de doublets normaux (translation seulement) :

$$(A2.27) \quad \frac{\mu_j(M) \cdot f_j(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu_j(M') \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') = C \times f_j(t) |_M$$

- Distribution de sources :

$$(A2.28) \quad \frac{\sigma_j(M) \cdot f_j(t)}{2} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_j(M') \frac{\partial}{\partial n_M} \left[\frac{f_j(t)}{MM'} + g_j(M, M', t) \right] dS(M') = \vec{V}_E \cdot \vec{n} |_M f_j(t)$$

Ces équations intégrales doivent être écrites pour chaque composante de la base de fonctions du temps, le potentiel total et les vitesses à chaque instant seront obtenus par sommation. Les singularités en facteur de la fonction de Green sont parfois appelées singularités de Kelvin.

VI MODIFICATIONS DES RESULTATS POUR DES CARENES COUPANT LA SURFACE LIBRE :

Considérons K carènes coupant la surface libre. On définit dans le plan de flottaison des carènes les contours de flottaison CF_k et le contour à l'infini C_{SL_∞} . Les contours CF_k divisent la surface libre en K+1 domaines : SL_e , domaine extérieur aux flottaisons des carènes et SL_i^k , domaine intérieur à la flottaison de la carène k.

La surface libre n'étant plus d'un seul tenant, on doit appliquer la formule (A2.25) dans les domaines $\tau_e \cap D^-$ limités par les surfaces S_k et la partie SL_e de la surface libre extérieure et dans chaque domaine intérieur limité par la surface S_k et la surface libre intérieure SL_i^k . Il vient :

$$\left. \begin{array}{l} M \in \tau_e \cap D^- \quad \Phi_e^j(M) f_j(t) \\ M \in S \quad \frac{\Phi_e^j(M) + \Phi_i^j(M)}{2} f_j(t) \\ M \in \tau_i^k \cap D^- \quad \Phi_i^j(M) f_j(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \Phi_e^j}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial n} \right)_{M'} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi_e^j - \Phi_i^j)_{M'} \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') \\ + I_L \end{array} \right.$$

avec : $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$

$$\begin{aligned} I_L = & \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_e} \frac{\partial \Phi_e^j}{\partial z'} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_e} \Phi_e^j(M') \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') \\ & + \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_i^k} \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial z'} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_i^k} \Phi_i^j(M') \frac{\partial}{\partial z'} \mathcal{G}_{jj}(M, M', t) dS(M') \right\} \end{aligned}$$

La normale \vec{n} étant extérieure à $\tau_i \cap D^-$

La condition de surface libre donne :

$$E \Phi_e |_{SL_e} = E \Phi_i |_{SL_i^k} = E \mathcal{G}_{jj} |_{SL_e} = E \mathcal{G}_{jj} |_{SL_i^k} = 0$$

La suite dépend de la condition de surface libre du problème posé.

Dans le cas le plus général, le terme I_L s'exprime sous la forme d'une intégrale double dans le plan $z = 0$ sur les surfaces SL_e et SL_i^k .

En tenant compte de la condition de surface libre du problème posé, il est possible

de transformer ces intégrales par application de la formule de Stokes. Le terme I_L se met alors sous la forme d'une intégrale sur les contours des flottaisons CF_k et sur le contour de la surface libre à l'infini $C_{SL\infty}$. Si l'intégrale sur le contour $C_{SL\infty}$ s'annule, le terme I_L s'exprime par des intégrales curvilignes sur les contours de flottaison appelés intégrales de ligne [6] [42]. Ces intégrales de ligne se retrouvent dans la formulation des équations intégrales et dans l'expression du potentiel lointain. Leur expression dépend du problème posé et du type de singularités choisi pour le résoudre. Dans certains cas particuliers, la contribution du terme I_L est nulle.

VII IDENTITES REMARQUABLES [7] :

On démontre que l'on peut exprimer le terme $\frac{1}{MM'}$, sous une forme intégrale. On obtient alors les identités suivantes :

$$(A2.29) \quad \frac{1}{MM'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk e^{k[z-z'+i\varpi]}$$

$$(A2.30) \quad \frac{1}{MM'} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{z-z'+i\varpi}$$

pour $z-z' < 0$

et

$$(A2.31) \quad \frac{1}{MM'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dk e^{k[-(z-z')+i\varpi]}$$

$$(A2.32) \quad \frac{1}{MM'} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{-(z-z')+i\varpi}$$

pour $(z-z') > 0$

avec :

$$\varpi = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta$$

VIII TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES :

VIII.1. Définition :

Soit une fonction de deux variables $f(x,y) \in L^1$. La transformée de Fourier de $f(x,y)$ est définie par :

$$(A2.33) \quad \mathfrak{F} [f(x,y)] = \hat{f}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y) e^{-i(ux + vy)}$$

Cette définition se généralise pour $f(x,y) \in L^2$:

$$(A2.34) \quad \mathfrak{F} [f(x,y)] = \hat{f}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x,y) e^{-i(ux + vy)}$$

l.i.m. désignant la limite en moyenne quadratique .

VIII.2. Inversion de la transformation :

Pour $f(x,y) \in L^1$, la formule (A2.33) peut être inversée et l'on obtient :

$$(A2.35) \quad f(x,y)_{p.p.} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \hat{f}(u,v) e^{i(ux + vy)}$$

La formule précédente étant valable "presque partout", c'est-à-dire sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle.

On obtient de même pour $f(x,y) \in L^2$:

$$(A2.36) \quad f(x,y)_{p.p.} = \frac{1}{2\pi} \text{l.i.m.} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \hat{f}(u,v) e^{i(ux + vy)}$$

La théorie peut être généralisée à des fonctions n'appartenant pas aux classes L^1 ou L^2 . Il est possible, par ailleurs, d'utiliser formellement les formules de la transformée de Fourier. Les résultats obtenus devront être justifiés, tous calculs effectués, en vérifiant que ceux-ci présentant bien toutes les qualités requises. Dans l'utilisation que nous ferons ultérieurement de la transformée de Fourier, les calculs seront effectués formellement.

VIII.3. Transformée de Fourier en coordonnées polaires :

En posant : $u = k \cos \theta$ et $v = k \sin \theta$

on obtient l'expression de la transformée de Fourier en coordonnées polaires :

$$(A2.37) \quad \hat{f}(\theta, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) e^{-i k (x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

La formule d'inversion des transformées de Fourier devient alors :

$$(A2.38) \quad f(x, y)_{p.p.} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k \hat{f}(\theta, k) e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

Si $f(x, y)$ est une fonction réelle, on a, en notant $\hat{f}^*(\theta, k)$, le conjugué de $\hat{f}(\theta, k)$:

$$(A2.39) \quad \hat{f}^*(\theta, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

et

$$(A2.40) \quad f(x, y)_{p.p.} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk k \hat{f}^*(\theta, k) e^{-i k (x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

On peut démontrer que pour une fonction $f(x, y)$ réelle :

$$(A2.41) \quad f(x, y)_{p.p.} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk k \hat{f}^*(\theta, k) e^{-i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \right\}$$

VIII.4. Propriétés remarquables :

La transformée de Fourier est un opérateur linéaire.

$$(A2.42) \quad \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} [f(x, y)] \} = f(x, y)_{p.p.}$$

$$(A2.43) \quad \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} [0] \} = 0_{p.p.}$$

IX SOLUTION GENERALE D'UN PROBLEME DE DIRICHLET DANS LE DOMAINE - $h \leq z \leq 0$:

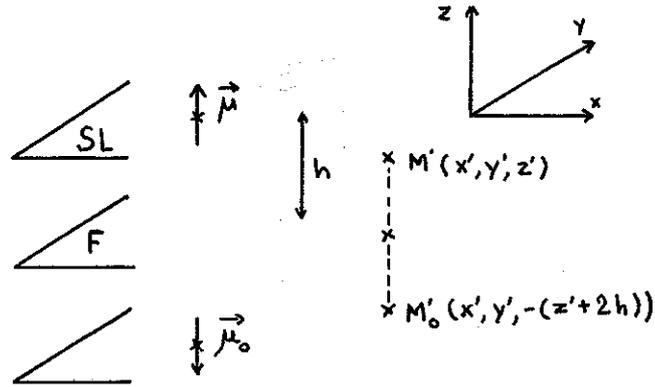


Figure A2.4

IX.1. Problème :

Il s'agit de trouver un potentiel ϕ vérifiant

$$(A2.44) \quad \begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } D^- : z \in]-h, 0[\text{ Equation de continuité} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 & \text{condition de glissement sur le fond} \end{cases}$$

Connaissant $\phi_0(x, y, t)$ dans le plan $z = 0$.

IX.2. Solution :

La condition de glissement sur le fond est satisfaite en associant à une distribution donnée de singularités, la distribution symétrique par rapport au fond.

Considérons une distribution de doublets normaux $\vec{\mu} = \mu(x', y', t) \vec{i}_z$ répartis dans le plan $z = 0$ et son symétrique $\vec{\mu}_0 = -\mu(x', y', t) \vec{i}_z$. Le potentiel induit par ces distributions est :

$$(A2.45) \quad \phi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \mu(x', y', t) \left[\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{MM'} \Big|_{z'=0} - \frac{\partial}{\partial z'_0} \frac{1}{MM'_0} \Big|_{z'_0=-2h} \right]$$

Compte tenu des identités :

$$(A2.46) \quad \frac{1}{MM'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk e^{k(z-z')} e^{ik\varpi} \right\} \quad \text{pour } z - z' < 0$$

avec $\varpi = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta$

et

$$(A2.47) \quad \frac{1}{MM_0'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk e^{-k(z-z_0')} e^{ik\bar{w}} \right\} \quad \text{pour } z-z_0' > 0$$

On obtient :

$$(A2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \mu(x',y',t) . \\ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk (-k e^{i\bar{w}}) [e^{kz} + e^{-k(z+2h)}] \right\} \end{array} \right.$$

Sous réserve de convergence des intégrales, on peut utiliser le théorème de Fubini :

$$(A2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) . \right. \\ \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \mu(x',y',t) e^{ik\bar{w}} \right\} \end{array} \right.$$

Dans le plan de la surface libre, on a d'après la transformée de Fourier :

$$(A2.50) \quad \phi_0(x,y,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\phi}_0(\theta,k,t)$$

avec

$$(A2.51) \quad \hat{\phi}_0(\theta,k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \phi_0(x',y',t)$$

De même :

$$(A2.52) \quad \hat{\mu}(\theta,k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \mu(x',y',t)$$

Le potentiel $\phi(x,y,z,t)$ s'écrit alors :

$$(A2.53) \left\{ \begin{aligned} \phi(x,y,z,t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) \\ & e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\mu}(\theta,k,t) \end{aligned} \right.$$

qui devient pour $z = 0$:

$$(A2.54) \left\{ \begin{aligned} \phi_0(x,y,t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{-kh} \operatorname{ch} kh \\ & e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\mu}(\theta,k,t) \end{aligned} \right.$$

Des deux expressions de $\phi_0(x,y,t)$ (A2.50) et (A2.54), on déduit :

$$(A2.55) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \right. \\ & \left. [\hat{\phi}_0(\theta,k,t) - e^{-kh} \operatorname{ch} kh \hat{\mu}(\theta,k,t)] \right\} \end{aligned} \right.$$

Et compte tenu des propriétés des transformées de Fourier :

$$(A2.56) \quad \hat{\mu}(\theta,k,t) = \frac{\hat{\phi}_0(\theta,k,t)}{e^{-kh} \operatorname{ch} kh}$$

d'où l'expression de $\phi(x,y,z,t)$:

$$(A2.57) \quad \phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \hat{\phi}_0(\theta,k,t) \right\}$$

Lorsque la profondeur h est infinie, un calcul similaire donne la formule suivante, qui coïncide avec la limite de $\phi(x,y,z,t)$ lorsque $h \rightarrow \infty$:

$$(A2.58) \quad \phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} e^{kz} \hat{\phi}_0(\theta,k,t) \right\}$$

On peut mettre ces résultats sous la forme générale :

$$(A2.59) \quad \phi(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} C(z) \hat{\phi}_0(\theta,k,t)$$

avec :

$$C(z) = \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \quad \text{en profondeur finie.}$$

et

$$C(z) = e^{kz} \quad \text{en profondeur infinie.}$$

X METHODE GENERALE DE DETERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN :

La fonction de Green $\mathcal{G}_{\sigma} = \frac{\sigma(t)}{MM'} + g(M,M',t)$ ou $g(M,M',t)$ est une fonction régulière dans le domaine fluide, $\sigma(t)$ une fonction du temps seul et $M'[x'(t), y'(t), z'(t)]$ est une fonction de l'espace et du temps doit vérifier la condition de surface libre pour $M \in SL$ et $M' \in D^-$ (D^- domaine fluide). Cette condition de surface libre s'écrit dans le cas le plus général lorsqu'on effectue les dérivations par rapport au temps dans le repère absolu :

$$(A2.60) \quad E \mathcal{G}_{\sigma}(M,M',t) |_{z=0} = f(M,t) |_{z=0}$$

$$E \text{ étant l'opérateur : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial z}$$

et $f(M,t)$ une fonction régulière dans le plan $z = 0$

On peut écrire pour simplifier les calculs ultérieurs :

$$(A2.61) \quad \mathcal{G}_{\sigma}(M,M',t) = \sigma(t) \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_0} \right) + g(M,M',t) = \phi_1 + g(M,M',t)$$

où $M'_0(x',y',-z'-2h)$ est la symétrique de M' par rapport au fond horizontal.

On peut mettre $\frac{1}{MM'}$ et $\frac{1}{MM'_0}$ sous la forme :

$$(A2.62) \quad \frac{1}{MM'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk e^{k[-(z-z') + i\theta]} \quad \text{pour } z - z' > 0$$

et

$$(A2.63) \quad \frac{1}{MM_0'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk e^{k[-z - (z' + 2h) + i\varpi]} \quad \text{pour } z + z' + 2h > 0$$

$$\varpi = (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta$$

On a donc :

$$(A2.64) \quad \phi_1 = \frac{2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} dk e^{-k(z+h)} \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi}$$

On cherche une solution $g(M, M', t)$ sous la forme :

$$(A2.65) \quad g(M, M', t) = \phi_2 + \phi_3$$

On pose :

$$(A2.66) \quad \Phi_1 = \phi_1 + \phi_2$$

Φ_1 devant vérifier les conditions suivantes :

$$(A2.67) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1 |_{z=h} = 0 \\ \Phi_1 |_{z=0} \equiv 0 \end{cases}$$

Le potentiel ϕ_2 peut s'écrire en fonction de la trace de sa transformée de Fourier dans le plan $z = 0$:

$$(A2.68) \quad \phi_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\phi}_{20}(\theta, k, t)$$

ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant par construction la condition de glissement sur le fond, ϕ_2 est défini par :

$$\phi_1 + \phi_2 |_{z=0} = 0$$

Soit :

$$(A2.69) \quad \begin{cases} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} k dk e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \\ \left[\hat{\phi}_{20}(\theta, k, t) + \frac{2\sigma(t)}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z'+h) e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \right] = 0 \end{cases}$$

D'où l'on déduit :

$$(A2.70) \quad \hat{\phi}_{20}(\theta, k, t) = \frac{-2\sigma(t)}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z'+h) e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)}$$

et

$$(A2.71) \quad \phi_2 = \frac{-2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-kh}}{\operatorname{ch} kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} dk$$

ou bien :

$$(A2.72) \quad \phi_2 = \frac{-2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} (1 - th kh) \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} dk$$

Φ_1 se met sous la forme :

$$\Phi_1 = \phi_1 + \phi_2 = \frac{-2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} [(1 - th kh) \operatorname{ch} k(z+h) - e^{-k(z+h)}] \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} dk$$

soit :

$$(A2.73) \quad \Phi_1 = \frac{-2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kh} \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\varpi} dk$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer le potentiel ϕ_3 en fonction de la condition de surface libre :

$$E\phi(M, M', t) |_{z=0} = f(M, t) |_{z=0}$$

Soit :

$$E(\Phi_1 + \phi_3) |_{z=0} = f(M, t) |_{z=0}$$

On a :

$$(A2.74) \quad E\Phi_1 |_{z=0} = g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} |_{z=0} = -g \frac{2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k \frac{\operatorname{ch} k(z'+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik\varpi} dk$$

Puisque $\Phi_1 \equiv 0$ dans le plan $z = 0$. Cette simplification justifie la résolution du problème intermédiaire ϕ_2 .

La fonction auxiliaire ϕ_3 peut aussi s'écrire en fonction de $\hat{\phi}_{30}(\theta, k, t)$:

$$(A2.75) \quad \phi_3 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t)$$

et la condition de surface libre pour cette fonction donne :

$$(A2.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \phi_3 |_{z=0} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \varepsilon' \frac{\partial}{\partial t} + g k \operatorname{th} kh \right) \\ \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{array} \right.$$

De même, le second membre peut être exprimé sous la forme de l'original de sa transformée de Fourier en coordonnées polaires :

$$(A2.77) \quad f(M, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{f}(\theta, k, t)$$

avec

$$(A2.78) \quad \hat{f}(\theta, k, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' e^{-i k (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} f(x', y', t)$$

En reportant ces identités dans la condition de surface libre, celle-ci s'écrit :

$$(A2.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk e^{i k (x \cos \theta + y \sin \theta)} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \varepsilon' \frac{\partial}{\partial t} + g k \operatorname{th} kh \right) \right. \\ \left. \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) - 2 g \sigma(t) \frac{\operatorname{ch} k(z'+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{-i k (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} - \hat{f}(\theta, k, t) \right\} = 0 \end{array} \right.$$

La fonction entre accolades étant une transformée de Fourier, on peut écrire :

$$(A2.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \varepsilon' \frac{\partial}{\partial t} + g k \operatorname{th} kh \right) \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) = \\ 2 g \sigma(t) \frac{\operatorname{ch} k(z'+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{-i k (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} + \hat{f}(\theta, k, t) \end{array} \right.$$

L'équation aux dérivées partielles de départ est alors transformée en une équation différentielle ordinaire et l'on en déduit la fonction auxiliaire $\hat{\phi}_{30}(\theta, k, t)$ puis ϕ_3 .

Pour un problème donné, $\sigma(t)$ est connu, le problème est donc parfaitement défini si l'on connaît la transformée de Fourier du second membre $\hat{f}(\theta, k, t)$ sous une forme se prêtant au calcul. Par exemple, si $f(x', y', t)$ présente une décroissance exponentielle à l'infini du plan x', y' , on peut représenter la fonction sous la forme de séries d'exponentielles dans chaque quadrant s du plan x', y' :

$$f(x',y',t) = a(t) \sum_{m=1}^M b_{m_s} e^{\lambda_{m_s} x'} \sum_{n=1}^N C_{n_s} e^{\lambda_{n_s} y'} \quad , \quad \text{Re } \lambda_{m_s} x' < 0 \quad , \quad \text{Re } \lambda_{n_s} y' < 0$$

dont la transformée de Fourier est immédiate :

$$\hat{f}(\theta,k,t) = a(t) \sum_{s=1}^4 \sum_{m=1}^M \frac{b_{m_s}}{\lambda_{m_s} - i k \cos \theta} \sum_{n=1}^N \frac{C_{n_s}}{\lambda_{n_s} - i k \sin \theta} \epsilon_s$$

avec $\epsilon_1 = \epsilon_4 = 1$ $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$

Dans le cas particulier où la condition de surface libre est homogène, on peut résoudre le problème dans le cas le plus général à l'aide de la transformation de Laplace.

Si l'on appelle s la variable de Laplace, les transformées des dérivées s'écrivent :

$$(A2.81) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_{30} \supset s F(s) - \hat{\phi}_{30}(t_0)$$

$$(A2.82) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\phi}_{30} \supset s^2 F(s) - s \hat{\phi}_{30}(t_0) - \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_{30}(t_0)$$

où t_0 est l'origine des temps, la transformée de Laplace étant définie par :

$$(A2.83) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(t-t_0)} \hat{\phi}_{30}(t) dt$$

Posons :

$$(A2.84) \quad G(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(t-t_0)} \left[2 g \sigma(t) \frac{\text{ch } k(z'+h)}{\text{ch } kh} e^{-i k(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \right] dt$$

L'équation différentielle (A2.80) s'écrit alors dans le plan de la variable de Laplace:

$$(A2.85) \quad s^2 F(s) - 2 \epsilon' F(s) + g k \text{ th } kh F(s) = G(s)$$

si l'on suppose que $\hat{\phi}_{30}(t_0)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_{30}(t_0)$ sont nuls, ce que nous vérifierons a posteriori. On en déduit :

$$(A2.86) \quad F(s) = \frac{G(s)}{s^2 + 2 \epsilon' s + g k \text{ th } kh}$$

Le dénominateur de cette expression est l'équation caractéristique de l'équation différentielle initiale. Ses racines sont :

$$(A2.87) \quad \begin{cases} s_1 = -\epsilon' + i \sqrt{gk \text{ th } kh} \\ s_2 = -\epsilon' - i \sqrt{gk \text{ th } kh} \end{cases}$$

On en déduit :

$$(A2.88) \quad F(s) = G(s) \left[\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right] \frac{1}{2i \sqrt{gk \operatorname{th} kh}}$$

La solution $F(s)$ est le produit de deux transformées de Laplace. L'original est donc le produit de convolution des deux originaux :

$$F(s) = G(s) \cdot H(s)$$

$$(A2.89) \quad f(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

d'où :

$$(A2.90) \quad \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) = \int_{t_0}^t \frac{-i g \sigma(\tau) \operatorname{ch} k[z'(\tau) + h]}{\operatorname{ch} kh \sqrt{gk \operatorname{th} kh}} e^{-i k[x'(\tau) \cos \theta + y'(\tau) \sin \theta]} [e^{s_1(t - \tau)} - e^{s_2(t - \tau)}] d\tau$$

$$\text{on vérifie bien que } \hat{\phi}_{30}(t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_{30}(t_0) = 0$$

D'où l'expression finale de la fonction de Green pour un mouvement quelconque exprimé dans le repère absolu, en présence d'un fond horizontal et d'une surface libre:

$$(A2.91) \quad \left. \begin{aligned} \phi_g(M, M', t) &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ \phi_1 &= \sigma(t) \left(\frac{1}{MM'} + \frac{1}{MM'_0} \right) \quad M'(x', y', z') \quad , \quad M'_0(x', y', -z' - 2h) \\ \phi_2 &= \frac{-2\sigma(t)}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} (1 - \operatorname{th} kh) \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\bar{w}} dk \\ \bar{w} &= (x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta \\ \phi_3 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} k dk \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) = \frac{-i g}{\operatorname{ch} kh \sqrt{gk \operatorname{th} kh}} \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \operatorname{ch} k[z'(\tau) + h] e^{-i k[x'(\tau) \cos \theta + y'(\tau) \sin \theta]} [e^{s_1(t - \tau)} - e^{s_2(t - \tau)}] d\tau$$

$$s_1 = -\varepsilon' + i \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$$

$$s_2 = -\varepsilon' - i \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$$

La formule établie ici est générale, elle peut se simplifier dans certains cas particuliers. Lorsque l'on cherche la solution en régime établi, il suffit de faire tendre t_0 vers $-\infty$, la viscosité évanescence ε' apparaît alors comme la constante de temps d'établissement du mouvement stationnaire.

En profondeur infinie, la forme la plus générale de la fonction de Green s'écrit :

(A2.92)

$$\begin{aligned} \psi(M, M', t) &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ \phi_1 &= \frac{\sigma(t)}{MM'} \\ \phi_2 &= \frac{-\sigma(t)}{MM'_1} \quad M'_1(x', y', -z') \\ \phi_3 &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty k dk e^{k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) \\ \hat{\phi}_{30}(\theta, k, t) &= \frac{-i g}{\sqrt{gk}} \int_{t_0}^t \sigma(\tau) e^{k[z'(\tau) - i[x'(\tau) \cos \theta + y'(\tau) \sin \theta]]} [e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)}] d\tau \\ s_1 &= -\varepsilon' + i \sqrt{gk} \\ s_2 &= -\varepsilon' - i \sqrt{gk} \end{aligned}$$

La solution obtenue par cette méthode vérifie la condition d'harmonicité de la fonction de Green. Les formules obtenues ayant été établies en utilisant formellement les formules d'inversion de la transformée de Fourier, on doit vérifier a posteriori que les solutions trouvées satisfont les hypothèses faites au cours des calculs.

- ANNEXE 3 -

CALCUL D'INTEGRALES DU TYPE $I(K_0, z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{k - K_0} dk$ avec $\text{Re}(z) > 0$

I FONCTION EXPONENTIELLE INTEGRALE D'ORDRE 1 :

- Exponentielle intégrale complexe d'ordre 1 :

Cette fonction est une fonction complexe de la variable complexe définie par :

$$(A3.1) \quad E_1(z) = \int_z^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \quad | \text{Arg } z | < \pi$$

- Exponentielle intégrale réelle :

L'exponentielle intégrale réelle est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$(A3.2) \quad E_1(x) = - \text{V.P.} \int_{-x}^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \quad x > 0$$

V.P. désignant la valeur principale de Cauchy.

- Propriétés :

$$(A3.3) \quad E_1(-x + i0) = -E_1(x) - i\pi$$

$$(A3.4) \quad E_1(-x - i0) = -E_1(x) + i\pi$$

$$(A3.5) \quad E_1(\bar{z}) = \overline{E_1(z)} \quad \bar{z} = x - iy$$

$$(A3.6) \quad \frac{d}{dz} [e^z E_1(z)] = e^z E_1(z) - \frac{1}{z} \quad | \text{Arg } z | < \pi$$

$$(A3.7) \quad \int dz e^z E_1(z) = e^z E_1(z) + \text{Log } z \quad | \text{Arg } z | < \pi$$

4°) Dans les autres cas :

$$(A3.13) \left\{ \begin{array}{l} e^z E_1(z) = \left(\sum_{n=0}^7 a_n z^n \right) / \left(\sum_{n=0}^8 b_n z^n \right) \quad \text{si } \text{Im}(z) \geq 0 \\ \\ = \left(\sum_{n=0}^7 \bar{a}_n z^n \right) / \left(\sum_{n=0}^8 \bar{b}_n z^n \right) \quad \text{si } \text{Im}(z) < 0 \end{array} \right. \quad |\epsilon| < 1.10^{-4}$$

$a_0 = -9,881266 + i 24,24952$	$a_1 = 417,3716 + i 196,6665$	$a_2 = 953,2441 - i 1342,447$
$a_3 = -1202,318 - i 1580,907$	$a_4 = -985,4221 + i 226,6272$	$a_5 = -70,52863 + i 227,9511$
$a_6 = 15,82958 + i 20,14222$	$a_7 = 1 - i 1,3935496 \cdot 10^{-6}$	$b_0 = -3,777369 + i 4,5109$
$b_1 = 115,3926 - i 461,2647$	$b_2 = 1216,791 - i 351,7189$	$b_3 = 383,3455 - i 2730,378$
$b_4 = -2082,250 - i 1522,471$	$b_5 = -1068,640 + i 434,4707$	$b_6 = -55,66969 + i 248,1167$
$b_7 = 16,83184 + i 20,14481$	$b_8 = 1$	

Les formules (A3.10) et (A3.12) sont données par M.Abramowitz et I.A.Stegun[1] la formule (A3.11) par J.L.Hess et A.M.O.Smith [69], la formule (A3.13) a été développée à partir des travaux de J.C. Daubisse [16].

II FORMULAIRE DE CALCUL DES INTEGRALES $I(\zeta)$: [53]

$$(A3.14) \quad I(\zeta) = I(K_0, z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{k - K_0} dk \quad , \quad \text{Re } z > 0$$

Notations :

$$\zeta = -K_0 z$$

$$K_0 = a + i b$$

$E_1(\zeta)$: exponentielle intégrale classique.

Expression de $I(\zeta)$, selon les valeurs de k_0 et m_0 :

(A3.15)

$a = \zeta$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b < 0$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta)$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta)$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta) \quad \text{Im}(\zeta) \geq 0$ $e^\zeta [E_1(\zeta) - 2i\pi] \quad \text{Im}(\zeta) < 0$
$b = 0$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta)$	X	$e^\zeta [E_1(\zeta) + i\pi] \quad \text{Im}(\zeta) \geq 0$ $e^\zeta [E_1(\zeta) - i\pi] \quad \text{Im}(\zeta) < 0$
$b > 0$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta)$	$e^\zeta \cdot E_1(\zeta)$	$e^\zeta [E_1(\zeta) + 2i\pi] \quad \text{Im}(\zeta) \geq 0$ $e^\zeta \cdot E_1(\zeta) \quad \text{Im}(\zeta) < 0$

III FONCTION $J(z)$:

On peut définir une fonction $J(z)$ par :

$$(A3.16) \quad \begin{cases} J(z) = e^z [E_1(z) + i\pi] & \text{si } \text{Im}(z) \geq 0 \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi \\ J(z) = e^z [E_1(z) - i\pi] & \text{si } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Cette fonction possède les propriétés suivantes, déduites de celles de $E_1(z)$:

$$(A3.17) \quad J(\bar{z}) = \overline{J(z)} \quad \bar{z} \text{ étant le conjugué de } z$$

$$(A3.18) \quad \int J(z) dz = J(z) + \text{Log}(-z)$$

$$(A3.19) \quad \frac{dJ(z)}{dz} = J(z) - \frac{1}{z}$$

- ANNEXE 4 -

RAPPEL DES RESULTATS DE LA METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE.

La méthode de la phase stationnaire due à Cauchy et à Lord Kelvin permet de calculer l'équivalent d'une intégrale dépendant d'un paramètre λ lorsque celui-ci tend vers l'infini.

Soit l'intégrale :

$$(A4.1) \quad I(\lambda) = \int_a^b d\theta \, f(\theta, \lambda) e^{i\lambda g(\theta)}$$

$f(\theta, \lambda)$ étant une fonction continue, bornée à variations lentes dans l'intervalle $]a, b[$, $g(\theta)$ étant une fonction continue et dérivable dans $]a, b[$. La méthode de la phase stationnaire permet de calculer l'équivalent de cette intégrale pour λ tendant vers l'infini.

Les résultats sont les suivants, $O\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$ désignant un infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{\lambda^n}$.

- $g'(\theta)$ ne s'annule pas pour $\theta \in]a, b[$:

$$(A4.2) \quad I(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda} \left[\left| \frac{f(b, \lambda)}{g'(b)} \right| + \left| \frac{f(a, \lambda)}{g'(a)} \right| \right]$$

- $g'(\theta) = 0$ pour $\theta = \alpha \in]a, b[$

• $g''(\theta) < 0$ pour $\theta = \alpha$:

$$(A4.3) \quad I(\lambda) \sim f(\alpha, \lambda) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\alpha)|}} e^{i[\lambda g(\alpha) - \frac{\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right]$$

• $g''(\theta) > 0$ pour $\theta = \alpha$:

$$(A4.4) \quad I(\lambda) \sim f(\alpha, \lambda) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\alpha)|}} e^{i[\lambda g(\alpha) + \frac{\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right]$$

• $g''(\theta) = 0$ pour $\theta = \alpha$ avec $g'''(\alpha) \neq 0$:

$$(A4.5) \quad I(\lambda) \sim f(\alpha, \lambda) \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt{3}} \left[\frac{6}{|g'''(\alpha)|} \right]^{1/3} e^{i\lambda g(\alpha)} \frac{1}{\lambda^{1/3}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

$\Gamma(x)$ étant l'intégrale d'Euler de deuxième espèce.

Ces résultats se généralisent au cas où $g'(\alpha)$ présente plusieurs extrema sur $[a, b]$. Dans le cas où l'un des extrema se trouve sur une borne et que la dérivée seconde sur cette borne n'est pas nulle, la contribution correspondante doit être divisée par 2.

- ANNEXE 5 -

DISCRETISATION D'UN PROBLEME INTEGRAL

I DISCRETISATION D'UNE EQUATION INTEGRALE :

Les équations intégrales permettant de déterminer les distributions de singularités cinématiquement équivalentes à la carène sont des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce qui peuvent être mises sous la forme générale :

$$(A5.1) \quad \frac{\lambda(M)}{2} + \iint_S \lambda(M') K(M, M') dS(M') = L(M)$$

λ étant la distribution de singularités inconnue.

Une méthode pratique pour résoudre ce type d'équations consiste à considérer la surface S comme la juxtaposition de N_1 facettes planes s_j ; une facette étant une portion de la surface S . Si l'on admet de plus que la dimension des facettes est telle que l'inconnue λ reste sensiblement égale à sa valeur moyenne λ_j , on peut écrire :

$$\frac{\lambda(M)}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j K_j(M) = L(M)$$

avec

$$K_j(M) = \iint_{s_j} K(M, M') dS(M')$$

Cette équation est une équation linéaire à N_1 inconnues.

Pour pouvoir la résoudre, il faut l'écrire en N_2 points de contrôle M_i ($N_2 \geq N_1$) qui peuvent être choisis en des points caractéristiques des N_1 facettes s_j . L'équation linéaire sera alors remplacée par le système de N_2 équations à N_1 inconnues suivant :

$$(A5.2) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_1} \lambda_j K_{ij} = L_i \quad i = 1, \dots, N_2 \\ L_i = L(M) |_{M=M_i} \\ K_{ij} = \iint_{s_j} K(M, M') dS(M') |_{M=M_i} \\ K_{ii} = \frac{1}{2} + \iint_{s_i} K(M, M') dS(M') |_{M=M_i} \end{array} \right.$$

qui pourra être résolu classiquement, par exemple par la méthode de triangularisation de Gauss, si $N_1 = N_2$, ou au sens des moindres carrés si $N_1 < N_2$ (par exemple par la méthode de Householder).

II DECOUPAGE D'UNE CARENE :

Les corps sont découpés en facettes. Dans ce qui suit, une facette est un quadrilatère plan ou non pouvant dégénérer en triangle, repérée par les quatre numéros de ses sommets : K, L, M, N.

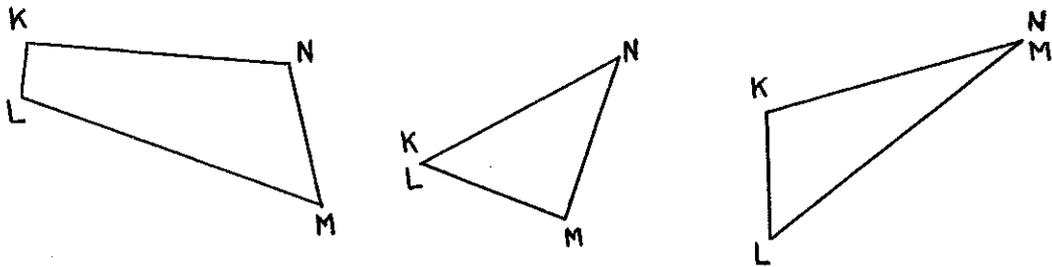


Figure A5.1

Deux méthodes peuvent être envisagées pour décrire les facettes d'un corps :

- Repérer tous les points par leur numéro, puis décrire les facettes par les numéros des points (numérotation naturelle).
- Repérer simultanément les points et les facettes à l'aide d'une convention de numérotation, par exemple celle de Hess et Smith.

Numérotation naturelle :

Chaque point est repéré par un numéro. On lit d'abord tous les points du corps avec leur numéro : I, X(I), Y(I), Z(I). La fin de l'entrée des points est déterminée par I=0.

Les facettes sont définies ensuite par la lecture des quatre numéros des points de base K, L, M, N de la facette. La normale extérieure à la facette est déterminée par la règle d'Ampère à partir du sens de rotation K L M N. La fin de l'entrée des numéros de facettes est repérée par 4 numéros nuls.

. Convention de Hess et Smith [68].

La facette est repérée par le numéro de son point de base K et le numéro du point diagonal M. Les numéros L et N sont obtenus à partir de K et M par $L=K+1$ et $N=M-1$. Dans ce principe de numérotation, c'est le point de base qui repère la facette, donc deux facettes ne peuvent avoir le même point de base. Certains points du découpage devront éventuellement recevoir plusieurs numéros, en particulier si la facette est triangulaire.

La normale extérieure à la carène est définie par la règle d'Ampère à partir du sens de rotation K L M N.

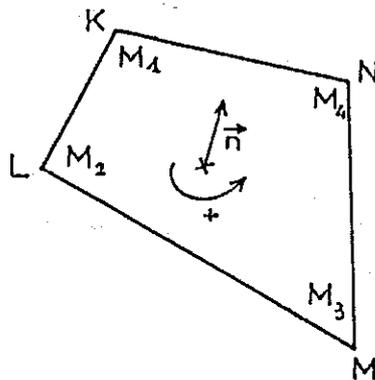


Figure A5.2

Tous les points du découpage sont considérés a priori comme étant des points de base. On associera au numéro du point, le numéro du point diagonal correspondant si celui-ci est effectivement point de base d'une facette, sinon, on lui associera symboliquement 0 (zéro) comme numéro de point diagonal.

Pour chaque point, on définira donc :

I numéro du point

M1(I) numéro du point diagonal associé au point de base I.

X(I), Y(I), Z(I) coordonnées du point I dans le repère des données.

Pour décrire un corps, ou un système de corps, il faut que les numéros des points de base commencent à 1 et se suivent jusqu'au dernier point du découpage sans omission.

Cas d'un système composé de plusieurs corps :

Dans le cas d'un système composé de plusieurs corps, chaque corps peut être repéré soit par le numéro de la dernière facette du corps (numérotation naturelle), soit par le numéro du dernier point de découpage du corps (convention de Hess et Smith). Chaque corps doit donc être décrit par des facettes ou des points consécutifs.

Dans le cas où il y a une symétrie, deux cas peuvent se présenter, le symétrique de chaque moitié du système pouvant soit osciller indépendamment du corps décrit (corps supplémentaire), soit être astreint à suivre les mouvements du corps décrit (si la moitié du corps seulement a été décrite). Ces deux possibilités sont repérées pour chaque corps par un indice permettant de décrire sans ambiguïté la configuration du système [22].

III CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES D'UNE FACETTE :

III.1. Repère élémentaire :

Un repère élémentaire (M_0, ξ, η, ζ) lié à la facette est obtenu de la façon suivante :

On définit d'abord une normale à la facette par :

$$(A5.3) \quad \vec{n} = \frac{\vec{M_1M_3} \wedge \vec{M_2M_4}}{|\vec{M_1M_3} \wedge \vec{M_2M_4}|} = \vec{i}_\zeta$$

L'origine M_0 du repère élémentaire est alors définie par :

$$(A5.4) \quad \vec{OM_0} = \frac{\vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3} + \vec{OM_4}}{4}$$

O étant l'origine du repère de référence.

L'axe $M_0 \xi$ est défini par :

$$(A5.5) \quad \vec{i}_\xi = \frac{\vec{M_1M_3}}{|\vec{M_1M_3}|}$$

et l'axe $M_0 \eta$ par :

$$(A5.6) \quad \vec{i}_\eta = \vec{n} \wedge \vec{i}_\xi$$

III.2. Matrice de passage du repère élémentaire au repère de référence :

La matrice de passage P est définie par les composantes dans le repère de référence des 3 vecteurs : $\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{n} = \vec{i}_\zeta$.

$$(A5.7) \quad P = \left(\begin{array}{ccc} \vec{i}_\xi & \vec{i}_\eta & \vec{i}_\zeta \end{array} \right) = \begin{pmatrix} i_{\xi x} & i_{\eta x} & i_{\zeta x} \\ i_{\xi y} & i_{\eta y} & i_{\zeta y} \\ i_{\xi z} & i_{\eta z} & i_{\zeta z} \end{pmatrix}$$

Les composantes X dans le repère de référence d'un vecteur \vec{V} dont les composantes exprimées dans le repère élémentaire sont Ξ seront données par

$$(A5.8) \quad X = P \Xi$$

P étant une matrice de passage entre deux repères orthonormés direct et i_ξ, i_η, i_ζ étant des vecteurs unitaires, on a :

$$(A5.9) \quad P^{-1} = P^t, \quad P^t \text{ désignant la transposée de } P$$

III.3. Coordonnées du centre de gravité :

Dans le repère élémentaire, les coordonnées du centre de gravité G de la facette sont données par :

$$(A5.10) \quad \begin{cases} \xi_G = \frac{\xi_4 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_2 (\eta_4 - \eta_1)}{3 (\eta_2 - \eta_4)} \\ \eta_G = -\frac{\eta_1}{3} \end{cases}$$

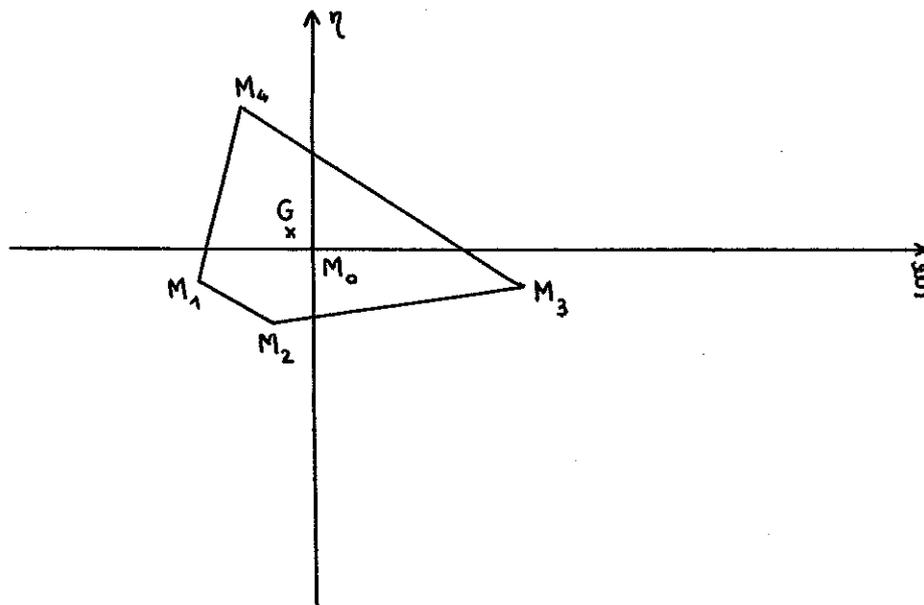


Figure A5.3

III.4. Calcul de l'aire de la facette :

L'aire de la facette est donnée par :

$$(A5.11) \quad \mathcal{A} = \frac{(\xi_3 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_4)}{2}$$

III.5. Distances caractéristiques :

La plus grande des deux diagonales est définie par :

$$(A5.12) \quad T = \text{Sup} (|\overrightarrow{M_1M_3}|, |\overrightarrow{M_2M_4}|)$$

La plus grande distance du centre de gravité à un sommet est défini par :

$$(A5.13) \quad \Omega = \text{Sup} (|\overrightarrow{G\xi_1}|, |\overrightarrow{G\xi_2}|, |\overrightarrow{G\xi_3}|, |\overrightarrow{G\xi_4}|)$$

III.6. Vérification de la planéité :

On calcule la distance des points au plan passant par M_0 et perpendiculaire à la normale \vec{n} à la facette.

On a :

$$(A5.14) \quad d_i = \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_i}$$

La facette est estimée plane si : $\text{Sup} (d_1, d_2, d_3, d_4) < 10^{-4} \cdot T$

III.7. Point nul :

Le point nul est le point où les vitesses tangentielles induites par une distribution de sources constantes situées sur la facette sont nulles. Ce point est déterminé en résolvant un système d'équations non linéaires par une méthode itérative [68].

On commence par calculer dans le repère élémentaire les vitesses V_ξ et V_η au centre de gravité de la facette :

$$V_{\xi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{d_k} \text{Log} \frac{R_{k+1} + R_k + d_k}{R_{k+1} + R_k - d_k}$$

$$V_{\eta} = \frac{-1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{d_k} \text{Log} \frac{R_{k+1} + R_k + d_k}{R_{k+1} + R_k - d_k}$$

avec $R_k = \sqrt{(\xi - \xi_k)^2 + (\eta - \eta_k)^2}$ et $d_k = \sqrt{(\xi_{k+1} - \xi_k)^2 + (\eta_{k+1} - \eta_k)^2}$

ceci constitue la première itération.

Si $|V_{\xi}|$ et $|V_{\eta}| < 10^{-4}$, le point nul est situé au centre de gravité.

Sinon, on calcule les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} V_{\xi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{D_k} \left[\frac{\xi - \xi_k}{R_k} + \frac{\xi - \xi_{k+1}}{R_{k+1}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} V_{\xi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{D_k} \left[\frac{\eta - \eta_k}{R_k} + \frac{\eta - \eta_{k+1}}{R_{k+1}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} V_{\eta} = \frac{-1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{D_k} \left[\frac{\xi - \xi_k}{R_k} + \frac{\xi - \xi_{k+1}}{R_{k+1}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} V_{\eta} = \frac{-1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{D_k} \left[\frac{\eta - \eta_k}{R_k} + \frac{\eta - \eta_{k+1}}{R_{k+1}} \right]$$

$$D_k = \frac{1}{2} [(R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2]$$

A l'itération p+1, le point nul de coordonnées ξ_{p+1}, η_{p+1} est obtenu en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V_{\xi}^{(p)} \right] [\xi_{p+1} - \xi_p] + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} V_{\xi}^{(p)} \right] [\eta_{p+1} - \eta_p] = -V_{\xi}^{(p)} \\ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V_{\eta}^{(p)} \right] [\xi_{p+1} - \xi_p] + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} V_{\eta}^{(p)} \right] [\eta_{p+1} - \eta_p] = -V_{\eta}^{(p)} \end{cases}$$

Le calcul est poursuivi jusqu'à ce que $|V_{\xi}|$ et $|V_{\eta}| < 10^{-4}$.

Si le processus n'a pas convergé après 20 itérations ou si le point vers lequel on a convergé est situé en dehors de la facette, le point nul est imposé au centre de gravité de la facette.

- ANNEXE 6 -

INTEGRALES DE SURFACE SUR UNE FACETTE PLANE

I CALCUL DE $S^0 = \iint_S \frac{1}{MM'} dS(M')$ [44] [21] :

- Formules exactes :

Sur une facette plane S à m côtés, de centre de gravité G(x_G, y_G, z_G) et de normale unitaire $\vec{n}(p, q, r)$, l'expression S⁰ peut être déterminée analytiquement [44] [21]. Si l'on désigne par P'_k(x'_k, y'_k, z'_k) les sommets successifs de la facette lorsque celle-ci est parcourue dans le sens direct par rapport à la normale \vec{n} , on a :

(A6.1)

$$S^0 = \sum_{k=1}^m J_k^s$$

$$J_k^s = Y_k \text{Log} \frac{N_k^1}{D_k^1} - 2|Z| \text{Arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t}$$

$$Y_k = (x - x'_k) \frac{a_k}{d_k} + (y - y'_k) \frac{b_k}{d_k} + (z - z'_k) \frac{c_k}{d_k}$$

$$a_k = q(z'_{k+1} - z'_k) - r(y'_{k+1} - y'_k)$$

$$b_k = r(x'_{k+1} - x'_k) - p(z'_{k+1} - z'_k)$$

$$c_k = p(y'_{k+1} - y'_k) - q(x'_{k+1} - x'_k)$$

$$d_k = \sqrt{(x'_{k+1} - x'_k)^2 + (y'_{k+1} - y'_k)^2 + (z'_{k+1} - z'_k)^2}$$

$$N_k^1 = R_{k+1} + R_k + d_k$$

$$D_k^1 = R_{k+1} + R_k - d_k$$

$$R_k = \sqrt{(x - x'_k)^2 + (y - y'_k)^2 + (z - z'_k)^2}$$

$$Z = p(x - x_G) + q(y - y_G) + r(z - z_G)$$

$$N_k^t = 2 Y_k d_k$$

$$D_k^t = (R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2|Z| (R_{k+1} + R_k)$$

- Formules asymptotiques :

Lorsque la distance du point M au centre de gravité de la facette est suffisamment grande, on peut utiliser la formule asymptotique suivante :

$$(A6.2) \quad S^0 = \frac{\mathcal{A}}{R_0} \quad \text{où } \mathcal{A} \text{ est l'aire de la facette et } R_0 \text{ la distance MG.}$$

Cette formule assure une erreur relative inférieure à 0,5 % dès que $\frac{R_0}{\Omega} > 7$, Ω étant la distance maximum de G à un sommet de la facette.

$$\text{II CALCUL DE } \begin{matrix} V^0 \\ \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right. \end{matrix} = \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{1}{MM'} dS(M')$$

- Formules exactes :

Les formules exactes s'obtiennent en dérivant par rapport à x, y et z les formules (A6.1). En posant :

$$R_{k_x} = \frac{\partial R_k}{\partial x} \quad ; \quad R_{k_y} = \frac{\partial R_k}{\partial y} \quad ; \quad R_{k_z} = \frac{\partial R_k}{\partial z}$$

et compte tenu de :

$$\frac{\partial}{\partial x} |Z| = p \operatorname{sgn}(Z) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} |Z| = q \operatorname{sgn}(Z) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} |Z| = r \operatorname{sgn}(Z)$$

où $\operatorname{sgn}(z) = +1$ si $z > 0$ et -1 si $z < 0$.

Il vient :

$$(A6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{s_x}^0 = \sum_{k=1}^m S_{k_x} \quad , \quad V_{s_y}^0 = \sum_{k=1}^m S_{k_y} \quad , \quad V_{s_z}^0 = \sum_{k=1}^m S_{k_z} \\ \text{avec :} \\ S_{k_x} = \frac{a_k}{d_k} \operatorname{Log} \frac{N_k^1}{D_k^1} - 2 \operatorname{sgn}(Z) p \operatorname{Arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t} + Y_k \frac{N_{k_x}^1 (D_k^1 - N_k^1)}{D_k^1 N_k^1} - 2|Z| \frac{N_{k_x}^t D_k^t - D_{k_x}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \\ S_{k_y} = \frac{b_k}{d_k} \operatorname{Log} \frac{N_k^1}{D_k^1} - 2 \operatorname{sgn}(Z) q \operatorname{Arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t} + Y_k \frac{N_{k_y}^1 (D_k^1 - N_k^1)}{D_k^1 N_k^1} - 2|Z| \frac{N_{k_y}^t D_k^t - D_{k_y}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 S_{k_z} &= \frac{c_k}{d_k} \operatorname{Log} \frac{N_k^1}{D_k^1} - 2 \operatorname{sgn}(Z) r \operatorname{Arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t} + Y_k \frac{N_{k_z}^1 (D_k^1 - N_k^1)}{D_k^1 N_k^1} - 2 |Z| \frac{N_{k_z}^t D_k^t - D_{k_z}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \\
 N_{k_x}^1 &= R_{k+1} \Big|_x + R_k \Big|_x, & D_{k_x}^1 &= N_{k_x}^1 \\
 & \Big|_y & \Big|_y & \Big|_y \\
 & \Big|_z & \Big|_z & \Big|_z \\
 R_{k_x} &= \frac{x - x'_k}{R_k}, & R_{k_y} &= \frac{y - y'_k}{R_k}, & R_{k_z} &= \frac{z - z'_k}{R_k} \\
 N_{k_x}^t &= 2 a_k, & N_{k_y}^t &= 2 b_k, & N_{k_z}^t &= 2 c_k \\
 D_{k_x}^t &= 2 [R_{k+1} + R_k + |Z|] N_{k_x}^1 + 2 (R_{k+1} + R_k) \operatorname{sgn}(Z) \Big|_p \\
 & \Big|_y & \Big|_y & \Big|_y \\
 & \Big|_z & \Big|_z & \Big|_z
 \end{aligned}$$

- Formules asymptotiques :

Pour R_0 grand, on peut utiliser les formules asymptotiques suivantes :

$$(A6.4) \quad V_{s_x}^0 = \mathcal{A} \frac{x_G - x}{R_0^3}, \quad V_{s_y}^0 = \mathcal{A} \frac{y_G - y}{R_0^3}, \quad V_{s_z}^0 = \mathcal{A} \frac{z_G - z}{R_0^3}$$

L'erreur relative entraînée par l'utilisation de ces formules est inférieure à 10^{-3} si $\frac{R_0}{\Omega} > 7$.

III CALCUL DE $D^0 = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') \quad [44] [21]$

- Formule exacte :

L'expression exacte de D peut être obtenue à partir de l'expression de V_z lorsque la facette est dans le plan $z = 0$. On a :

$$D^0 = \iint_S \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{MM'} dS(M') = - \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{MM'} dS(M') = - V_z$$

on a donc :

$$(A6.5) \quad D^0 = \sum_{k=1}^m 2 \operatorname{sgn}(Z) \operatorname{Arctg} \frac{N_k^t}{D_k^t} = \sum_{k=1}^m K_k$$

- Formule asymptotique :

Pour R_0 grand, on a la formule asymptotique suivante :

$$(A6.6) \quad D^0 = \mathcal{A} \frac{Z}{R_0^3}$$

L'erreur relative entraînée par cette formule est inférieure à 1,5 % pour $\frac{R_0}{\Omega} > 7$, l'erreur absolue étant dans tous les cas inférieure à 10^{-4} .

IV CALCUL DE
$$V_{d_x}^0 = \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} \frac{1}{MM'} dS(M') :$$

- Formules exactes :

Les vitesses s'obtiennent par dérivation de la formule précédente :

$$(A6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{d_x}^0 = \sum_{k=1}^m D_{k_x} \quad , \quad V_{d_y}^0 = \sum_{k=1}^m D_{k_y} \quad , \quad V_{d_z}^0 = \sum_{k=1}^m D_{k_z} \\ D_{k_x} = 2 \frac{N_{k_x}^t D_k^t - D_{k_x}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \operatorname{sgn}(Z) \\ D_{k_y} = 2 \frac{N_{k_y}^t D_k^t - D_{k_y}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \operatorname{sgn}(Z) \\ D_{k_z} = 2 \frac{N_{k_z}^t D_k^t - D_{k_z}^t N_k^t}{(N_k^t)^2 + (D_k^t)^2} \operatorname{sgn}(Z) \end{array} \right.$$

- Formules asymptotiques :

En posant : $Z_0 = p(x - x_G) + q(y - y_G) + r(z - z_G)$, les formules asymptotiques s'écrivent :

$$(A6.8) \quad \begin{cases} V_{dx}^0 = \mathcal{A} \left[\frac{p}{R_0^3} - \frac{3(x-x_G)Z_0}{R_0^5} \right] \\ V_{dy}^0 = \mathcal{A} \left[\frac{q}{R_0^3} - \frac{3(y-y_G)Z_0}{R_0^5} \right] \\ V_{dz}^0 = \mathcal{A} \left[\frac{r}{R_0^3} - \frac{3(z-z_G)Z_0}{R_0^5} \right] \end{cases}$$

Pour $\frac{R_0}{\Omega} > 7$ l'erreur relative est inférieure à 2 % et l'erreur absolue inférieure à 4.10^{-4} .

V CALCUL D'INTEGRALES DU TYPE $I = \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M') \quad [45] [48] [53] [21] :$

Soit $I = \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M')$ avec $\xi = A [z + \varepsilon z' + i[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]]$

$\ddot{F}(\xi)$ désignant la dérivée seconde de $F(\xi)$ par rapport à ξ et $\varepsilon = \pm 1$.

S étant une facette plane appartenant au plan d'équation : $p(x' - x_0) + q(y' - y_0) + r(z' - z_0) = 0$.

x_0, y_0 et z_0 étant un point de la facette S, (p,q,r) étant les cosinus directeurs de la normale \vec{n} à la facette ($p^2 + q^2 + r^2 = 1$).

.Si $p \neq 0$; on a :

$$x' = x_0 - \left[\frac{q}{p} (y' - y_0) + \frac{r}{p} (z' - z_0) \right]$$

d'où :

$$\xi = A \left\{ z + \varepsilon z' + i \left[\left[x - x_0 + \frac{q}{p} (y' - y_0) + \frac{r}{p} (z' - z_0) \right] \cos \theta + (y - y') \sin \theta \right] \right\}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z'} \dot{F}(\xi) = \ddot{F}(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z'} = A \ddot{F}(\xi) \left[\varepsilon + \frac{ir}{p} \cos \theta \right]$$

ce qui entraîne :

$$\ddot{F}(\xi) = \frac{1}{A} \frac{p\varepsilon - ir \cos \theta}{p^2 + r^2 \cos^2 \theta} p \frac{\partial}{\partial z'} \dot{F}(\xi)$$

La formule de Stokes s'écrit, pour une facette S limitée par un contour C :

$$\iint_S \begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ L & M & N \end{vmatrix} dS(M') = \int_C L dx' + M dy' + N dz'$$

En appliquant cette formule pour $L = N = 0$ et $M = \dot{F}(\xi)$:

$$- \iint_S p \frac{\partial M}{\partial z'} dS(M') = \int_C M dy'$$

on obtient :

$$I = - \frac{1}{A} \frac{p \varepsilon - i r \cos \theta}{p^2 + r^2 \cos^2 \theta} \int_C \dot{F}(\xi) dy'$$

. Si $q \neq 0$, on a de même :

$$\xi = A \left\{ z + \varepsilon z' + i \left[(x - x_0) \cos \theta + \left[y - y_0 + \frac{r}{p} (z' - z_0) + \frac{p}{q} (x' - x_0) \right] \sin \theta \right] \right\}$$

d'où :

$$\ddot{F}(\xi) = \frac{1}{A} \frac{q \varepsilon - i r \sin \theta}{q^2 + r^2 \sin^2 \theta} q \frac{\partial}{\partial z'} \dot{F}(\xi)$$

La formule de Stokes appliquée avec $M = N = 0$ et $L = \dot{F}(\xi)$ donne :

$$\iint_S q \frac{\partial L}{\partial z'} dS(M') = \int_C L dx'$$

d'où :

$$I = \frac{1}{A} \frac{q \varepsilon - i r \sin \theta}{q^2 + r^2 \sin^2 \theta} \int_C L dx'$$

De sorte que si $p, q \neq 0$, on peut écrire :

$$I = - \frac{1}{A} \frac{p \varepsilon - i r \cos \theta}{p^2 + r^2 \cos^2 \theta} \int_C \dot{F}(\xi) dy' = \frac{1}{A} \frac{q \varepsilon - i r \sin \theta}{q^2 + r^2 \sin^2 \theta} \int_C \dot{F}(\xi) dx'$$

$$I = \frac{1}{A} \int_C \dot{F}(\xi) [-(p \varepsilon - i r \cos \theta) dy' + (q \varepsilon - i r \sin \theta) dx']$$

Si C est une ligne polygonale plane composée de m segments $[P'_k, P'_{k+1}]$ on peut écrire :

$$I = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m I_k$$

avec :

$$I_k = \int_{P'_k}^{P'_{k+1}} \dot{F}(\xi) [-(p \varepsilon - i r \cos \theta) dy' + (q \varepsilon - i r \sin \theta) dx']$$

Sur $[P'_k, P'_{k+1}]$, ξ est une fonction linéaire de x' , y' ou z' , on a donc :

- Si $|\xi_{k+1} - \xi_k| \neq 0$:

$$dx' = \frac{x'_{k+1} - x'_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} d\xi$$

$$dy' = \frac{y'_{k+1} - y'_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} d\xi$$

d'où :

$$I_k = [(x'_{k+1} - x'_k) (q \varepsilon - i r \sin \theta) - (y'_{k+1} - y'_k) (p \varepsilon - i r \cos \theta)] \frac{F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)}{\xi_{k+1} - \xi_k}$$

- Si $|\xi_{k+1} - \xi_k| = 0$:

$$I_k = [(x'_{k+1} - x'_k) (q \varepsilon - i r \sin \theta) - (y'_{k+1} - y'_k) (p \varepsilon - i r \cos \theta)] \frac{\dot{F}(\xi_{k+1}) - \dot{F}(\xi_k)}{2}$$

Ces formules ont été établies pour $p, q \neq 0$, on démontre qu'elles sont vraies $\forall p, q, r$.

On a donc le résultat général suivant :

$$I = \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M') \quad \xi = A [z + \varepsilon z' + i [(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta]] \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

S étant une facette délimitée par un contour polygonal plan à m côtés.

$$(A6.9) \quad I = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m [(x'_{k+1} - x'_k) (q \varepsilon - i r \sin \theta) - (y'_{k+1} - y'_k) (p \varepsilon - i r \cos \theta)] M_k$$

avec :

$$(A6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_k = \frac{F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)}{\xi_{k+1} - \xi_k} \quad \text{si } |\xi_{k+1} - \xi_k| > t \\ \text{et} \\ M_k = \frac{1}{2} [\dot{F}(\xi_{k+1}) + \dot{F}(\xi_k)] = \dot{F}\left(\frac{\xi_{k+1} + \xi_k}{2}\right) \quad \text{si } |\xi_{k+1} - \xi_k| \leq t \end{array} \right.$$

t étant une tolérance numérique, le premier terme négligé étant en $O(t^2)$.

VI CALCUL D'INTEGRALES DU TYPE $J = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} G(\xi) dS(M')$ [48] [53] [21] :

Soit $J = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} G(\xi) dS(M')$, ξ étant toujours défini par :

$$\xi = A [z + \varepsilon z' + i [(x - x') \cos \theta + (y - y') \sin \theta]] \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

$$\text{et } \vec{n}_{M'} = (p, q, r) \quad \text{avec } p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

Par définition, on a :

$$\frac{\partial}{\partial n_{M'}} G(\xi) = (p \frac{\partial \xi}{\partial x'} + q \frac{\partial \xi}{\partial y'} + r \frac{\partial \xi}{\partial z'}) \frac{dG(\xi)}{d\xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'} = - (i \cos \theta) A \quad \frac{\partial \xi}{\partial y'} = - (i \sin \theta) A \quad \frac{\partial \xi}{\partial z'} = \varepsilon A$$

En posant :

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \dot{F}(\xi) \\ \dot{G}(\xi) &= \frac{dG(\xi)}{d\xi} = \ddot{F}(\xi) \end{aligned}$$

On est alors ramené à calculer une intégrale de type $I = \iint_S \dot{F}(\xi) dS(M')$ définie précédemment, il vient :

$$J = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{M'}} G(\xi) dS(M') = A [\varepsilon r - i (p \cos \theta + q \sin \theta)] \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M')$$

avec :

$$\ddot{F}(\xi) = \dot{G}(\xi)$$

Cette intégrale peut être exprimée d'une façon plus simple en reprenant les calculs ayant conduit à l'expression de I.

$$I = \iint_S \ddot{F}(\xi) dS(M') = \frac{1}{A} \left[\frac{1}{q \varepsilon + i r \sin \theta} \int_C \dot{F}(\xi) dx' \right] = -\frac{1}{A} \left[\frac{1}{p \varepsilon + i r \cos \theta} \int_C \dot{F}(\xi) dy' \right]$$

soit :

$$I = \frac{1}{A} \left[\frac{1}{q \varepsilon \sin \theta + p \varepsilon \cos \theta + i r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \right] \int_C \dot{F}(\xi) [\sin \theta dx' - \cos \theta dy']$$

qui peut s'écrire :

$$I = \frac{1}{A} \frac{-i \varepsilon}{\varepsilon r - i (p \cos \theta + q \sin \theta)} \int_C \dot{F}(\xi) [\sin \theta dx' - \cos \theta dy']$$

d'où :

$$J = -i \varepsilon \int_C \dot{F}(\xi) [\sin \theta dx' - \cos \theta dy']$$

Cette expression, établie pour $p, q \neq 0$ est valable $\forall p, q, r$.

Si C est une ligne polygonale plane à m côtés, on a donc :

$$(A6.11) \quad J = -i \varepsilon \sum_{k=1}^m [(x'_{k+1} - x'_k) \sin \theta - (y'_{k+1} - y'_k) \cos \theta] N_k$$

avec :

$$(A6.12) \quad \begin{cases} N_k = \frac{F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)}{\xi_{k+1} - \xi_k} & \text{si } |\xi_{k+1} - \xi_k| > t \\ \text{et} \\ N_k = \frac{1}{2} [\dot{F}(\xi_{k+1}) + \dot{F}(\xi_k)] = \left[\frac{G(\xi_{k+1}) + G(\xi_k)}{2} \right] & \text{si } |\xi_{k+1} - \xi_k| \leq t \end{cases}$$

t étant une tolérance numérique.

- ANNEXE 7 -

SCHEMA DE DIFFERENCES FINIES DECENTRE AMONT

- Position du problème :

On souhaite calculer la valeur prise par la dérivée d'une fonction $F(x)$ en un point I d'après les N valeurs prises par la fonction en amont de ce point.

En notant : $F_{I-k} = F[x(I-k)]$ et $F_{xI} = \frac{\partial F}{\partial x} |_I$,

Le schéma de différences finies à N points, décentré amont, s'écrit :

$$(A7.1) \quad F_{xI} = \sum_{k=0}^{N-1} e_k F_{I-k}$$

e_k étant les coefficients du schéma.

- Détermination des coefficients du schéma :

On pose $d_k = |x(I) - x(I-k)|$

On peut exprimer F_{I-k} à partir des dérivées de F en I à l'aide d'un développement en série de Taylor :

$$(A7.2) \quad F_{I-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d_k^n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial x^n} |_I$$

et en reportant dans (A7.1) :

$$(A7.3) \quad F_{xI} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} e_k d_k^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} |_I$$

que l'on peut écrire :

$$(A7.4) \quad \begin{cases} F_{xI} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} |_I \\ C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} e_k d_k^n \end{cases}$$

Le calcul exact de la dérivée première en I impose :

$$C_0 = 0, C_1 = 1, C_n = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

Numériquement, les coefficients e_k du schéma sont obtenus par résolution d'un

système linéaire à N inconnues. Pour $N > 2$, en choisissant d'annuler $N - 2$ termes du développement, on obtient un système linéaire collocatif, les coefficients du schéma sont alors déterminés en fonction des distances d_k de façon unique. Un schéma à N points permet donc d'annuler les contributions des dérivées d'ordre 0, 1 et de $N-2$ dérivées parmi celles d'ordre supérieur.

- ANNEXE 8 -

PARALLELISATION DU CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE

- Structure du programme :

Le programme permet de calculer l'influence de chaque facette représentant le corps (en nombre NC) et des facettes symétriques (1 ou 2 symétries) en chaque point de contrôle (en nombre NC). En se fixant un point de contrôle, on calcule l'influence de toutes les facettes (facettes du corps + symétriques) à l'aide de formules définies aux paragraphes I, II, III et IV de l'annexe 6. Ces formules sont de deux types :

- Une formule exacte faisant intervenir les distances du point de contrôle aux sommets de la facette et différentes caractéristiques de la facette lorsque la distance moyenne de la facette au point de contrôle est inférieure à une valeur donnée (3,5 fois la diagonale de la facette). Cette formulation est complexe (≈ 60 lignes de Fortran).

- Une formule asymptotique faisant intervenir des grandeurs globales de la facette. Cette formulation est simple (≈ 3 lignes de Fortran).

. Le principe de parallélisation :

Le principe retenu a consisté tout d'abord à réorganiser complètement la structure du programme en regroupant les boucles des formules exactes et asymptotiques par des instructions Gather-Scatter (ou leur équivalent en Fortran scalaire). Les tests internes des boucles ont été remplacés par des formules donnant le même résultat. Les variables auxiliaires ont été calculées et stockées sous forme de vecteurs.

Les instructions Gather et Scatter (rassembler et disperser) opèrent sur des tableaux X,Y de dimension N qui sont rassemblés ou dispersés en fonction d'un tableau d'indices entier I. Leur traduction FORTRAN est la suivante :

GATHER :

```
ou :      CALL GATHER (N,X,Y,I)
          DO 10 J=1,N
            X(I) = Y(I(J))
          10 CONTINUE
```

SCATTER :

```
ou :      CALL SCATTER R (N,Y,X,I)
          DO 20 J=1,N
            Y(I(J)) = X(J)
          20 CONTINUE
```

. Algorithme du programme initial :

```
Début
  Pour I = 1,NC /boucle sur les points influencés/
    Pour J = 1,NC /boucle sur les facettes influençantes/
      T / 1/2 diagonale de la facette/
      Pour JJ = 1, NJJ / boucle sur les symétries /
        RO / distance CdG facette au point de contrôle /
        Si RO > 7T Alors
          Formules asymptotiques
          Sinon
            Pour L = 1,5
              distances aux sommets de la facette
            Fin pour
            initialisation
            Pour L = 1,4 / boucle sur les côtés de la facette /
              DK
              Si DK > ε Alors
                calculs préliminaires
                GZ / paramètre de distance normale /
                Si GZ > ε alors
                  AT = formule
                  sinon
                    AT = 0
                Finsi
                Sommation sur les côtés de la facette
              Finsi
            Fin pour
          Finsi
        Fin pour
      Finsi
    Fin pour
    Sommation sur les symétries
  Fin pour
  Ecriture des résultats sur fichier
Fin pour
Fin
```

. Algorithme du programme parallélisé :

```
Début
  Pour I = 1,NC / boucle sur les points influencés /
    Pour J = 1, NC
      Calcul de T (J) / Vecteur des 1/2 diagonales des facettes /
    Fin pour
    Pour JJ = 1, NJJ / boucle sur les symétries /
      Pour J = 1, NC / boucle sur les facettes /
        RO (J) / vecteur des distances CdG facette au point de contrôle /
      Fin pour
      KAS = 0 ; KEX = 0
      Pour J = 1,NC
        Si RO (J) > 7T (J) Alors
          KAS = KAS + 1
          IAS (KAS) = J
          Sinon
            KEX = KEX + 1
            IEX (KEX) = J
        Finsi
      Fin pour
      Gather des vecteurs auxiliaires en fonction de IAS
      Pour J = 1,KAS
        Formules asymptotiques
      Fin pour
      Scatter des vecteurs résultats en fonction de JJ
      Gather des vecteurs auxiliaires en fonction de IEX
      Pour J = 1, KEX
        Formules exactes
      Fin pour
      Scatter des vecteurs résultats en fonction de JJ
    Fin pour
    Sommation des vecteurs résultats en fonction de NJJ
    Ecriture des résultats sur fichier
  Fin pour
Fin
```

Gain de temps de calcul :

Pour un corps discrétisé en 132 facettes, avec KAS = 90 et KEX = 40, le rapport de performance entre les versions scalaire et vectorielle est de 3,8 sur CRAY 1-S. Le rapport de performance est en général supérieur dans les cas usuels pour NC > 132.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. ABRAMOWITZ - I.A. STEGUN
"Hand book of mathematical Functions"
National Bureau of Standards Applied Mathematics Series,
Vol. 55 , U.S Government Printing Office,
Washington D.C. , 1964
Dover Publications Inc. , New York
ninth printing 1970 1970
- [2] V.K. ANKUDINOV
"Non-periodical forces and moments on a ship in waves"
International Shipbuilding Progress , Vol. 16 , n°179 1969
- [3] E. BABA
"On the free surface conditions used by Nakatake et al. and Dawson"
Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations,
Washington 1979 , pp 504-510 1979
- [4] J. BASS
"Cours de Mathématiques"
Masson et Cie , Paris 1968
- [5] C. BERHAULT, B. MOLIN
"Calcul des efforts du 1er ordre sur les plates-formes semi-submersibles :
choix d'une méthode"
Compte rendu des Premières Journées Françaises de l'Hydrodynamique
E.N.S.M. Nantes 1987
- [6] R. BRARD
"The representation of a given ship form by singularity distributions
when the boundary condition on the free surface is linearized"
Journal of Ship Research , Vol. 16 , number 1 , March 1972 1972
- [7] R. BRARD
"Hydrodynamique Navale"
Cours de la Section d'Hydrodynamique Navale Avancée de l'E.N.S.M. 1972
- [8] S.R. BREIT
"A higher-order panel method for surface waves radiation
and diffraction by a spheroid"
Fourth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
Washington 1985 1985
- [9] C.Y. CHEN, F. NOBLESSE
"Comparaison between theroretical predictions of wave resistance
and experimental data for the Wigley Hull"
Journal of Ship Research, December 1983 , pp 215-226 1983
- [10] B.H. CHENG, G.G. BORDA, J.S. DEAN, S.C. FISCHER
"A numerical/experimental technique for wave resistance prediction"
International Conference CADMO. Washington , September 1986 1986

- [11] J.L. CHENOT
"Méthode numérique de calcul de mouvement d'un corps flottant soumis à l'influence d'une houle périodique en théorie linéaire"
Revue de l'Institut Français du Pétrole , Vol. XXX , n°5 1975
- [12] A. CLEMENT
"Etude bibliographique de la dérive des corps flottants sur une houle régulière"
Rapport I.F.P. , E.N.S.M. Nantes 1977
- [13] A. CLEMENT
"Contribution à l'étude théorique et expérimentale des mouvements des corps flottants induits par une houle régulière en profondeur finie uniforme"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M. Nantes, Janvier 1979 1979
- [14] O. DAUBE, A. DULIEU
"A numerical approach of the nonlinear wave resistance problem".
Third International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
Paris, June 1981 1981
- [15] J.C. DAUBISSE
"Some results on approximation by exponential series applied to hydrodynamic problems"
Third International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
Paris, June 1981 1981
- [16] J.C. DAUBISSE
"Sur quelques méthodes numériques spécifiques de l'hydrodynamique navale"
Thèse de Doctorat-ès-Sciences
E.N.S.M. Nantes 1984 1984
- [17] J. C. DAUBISSE
"Some results about approximation of functions of one or two variables by sums of exponentials"
International Journal for numerical methods in engineering
Vol. 23 , pp1959-1967 1986
- [18] C.W. DAWSON
"A practical computer method for solving ship-wave problems"
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
University of California, Berkeley, 1977 , pp 30-38 1977
- [19] C.W. DAWSON
"Calculations with the XYZ free surface program for five ship models"
Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations,
Washington 1979 , pp 232-255 1979
- [20] G. DELHOMMEAU
"Résistance de vagues par la méthode de GUILLOTON"
Rapport Chantiers de l'Atlantique n° 7405 C.I. ,
E.N.S.M. Nantes , Mai 1975 1975

- [21] G. DELHOMMEAU
"Contribution à l'étude théorique et à la résolution numérique
du problème de la résistance de vagues"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M. Nantes , 1978 1978
- [22] G.DELHOMMEAU
"Programme AQUADYN - Notice d'utilisation"
Juin 1983 - Avril 85 - Octobre 1986
E.N.S.M. Nantes 1986
- [23] G. DELHOMMEAU
"Calcul des efforts de dérive sur un ensemble de corps"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°84 , Paris 1984
- [24] G. DELHOMMEAU, J.J. MAISONNEUVE
"Application de la méthode des singularités de Rankine au calcul
de la résistance de vagues"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°86 ,Paris 1986
- [25] G. DELHOMMEAU, J.J. MAISONNEUVE
"Calculation of flow around several ship hulls by a Rankine source method"
Hydrosoft , Southampton , September 1986 1986
- [26] G. DELHOMMEAU, J.J. MAISONNEUVE
"Extensions du code de calcul de résistance de vagues REVA :
prise en compte des effets de fond et de portance"
Compte rendu des Premières Journées Françaises de l'Hydrodynamique
E.N.S.M. Nantes 1987
- [27] J.C. DERN
"Une approche variationnelle du problème de Neumann-Kelvin"
Rapport 5772 BA/N Bassin des Carènes , Paris , Janvier 1976 1976
- [28] R. EATOCK TAYLOR , E.R. JEFFERYS
"Variability of hydrodynamic load predictions for a tension leg platform"
Ocean Engineering , Vol 13, n°5, pp 449-490 1986
- [29] A.EMERSON
"The Calculation of Ship Resistance : an Application of Guilloton's Method"
Quaterly Transactions. The Royal Institution of Naval Architects.
Vol. 109 , n°3 , July 1967 1967
- [30] D. EUVRARD , A. JAMI , C. MORICE , Y. OUSSET
"Calcul numérique des oscillations d'un navire engendrées par la houle"
Journal de Mécanique ,Vol.16 , n°2 et 3 1977
- [31] D.EUVRARD
"La Résolution du problème de Neumann-Kelvin : une première
approche par différences finies"
Rapport de recherche 086 , E.N.S.T.A. Paris , Septembre 1977 1977

- [32] D. EUVRARD
"Les problèmes de mécanique et d'analyse numérique posés par la tenue à la mer des navires et des structures pétrolières"
Conférence Générale 5ème Congrès Association Universitaire de Mécanique.
Marseille , Septembre 1981
E.N.S.T.A. Rapport de recherche 153 1981
- [33] D. EUVRARD
"Les mille et une facéties de la fonction de Green du problème de la résistance de vagues"
E.N.S.T.A. Rapport de recherche 144 1983
- [34] L.M. FALTINSEN , F.C. MICHELSEN
"Motions of Large Structures in Waves at Zero Froude Number"
Proc. Intern. Symp. Dyn. Mar. Vehicles Struct. Waves,
London 1974 , pp. 91-106 1974
- [35] C. FARELL
"On the Wave Resistance of a Submerged Spheroid"
Journal of Ship Research , Vol. 17, number 1 , March 1973 1973
- [36] C. FARELL, O. GUVEN
"On the experimental determination of the resistance components of a submerged spheroid"
Journal of Ship Research , Vol.17 , number 2 , June 1973 1973
- [37] W. FRANK
"Oscillations of cylinders in or below the free surface of deep fluids"
N.S.R.D.C. , Washington D.C.
Report 2375/1967 1967
- [38] G.E. GADD
"Wave Resistance Calculation by Guilloton's Method"
Quarterly Transaction . The Royal Institution of Naval Architects
Vol. 115 , n°4 , October 1973 1973
- [39] G.E. GADD
"Improved methods for the calculation of ship resistance"
International Conference CADMO. Washington , September 1986 1986
- [40] A. GREKAS
"Contribution à l'étude théorique et expérimentale des efforts du second ordre et du comportement dynamique d'une structure marine sollicitée par une houle régulière et un courant"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M. Nantes, 1981 1981
- [41] P. GUEVEL
"Introduction à l'hydrodynamique"
Cours de 3ème année d'élève-ingénieur , E.N.S.M. Nantes 1972

- [42] P. GUEVEL , P. VAUSSY , J.M. KOBUS
"The distribution of singularities kinematically equivalent to a moving hull in the presence of a free surface"
International Shipbuilding Progress , Vol. 21 , n°243 , November 1974 1974
- [43] P. GUEVEL , J.M. KOBUS
"Flotteurs cylindriques horizontaux soumis à des oscillations forcées de très faibles amplitudes"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°75 , Paris 1975
- [44] P. GUEVEL
"Corps solide animé d'un mouvement quelconque dans un fluide illimité"
Cours de la S.S.H.N.A. , E.N.S.M. Nantes 1976
- [45] P. GUEVEL , G. DELHOMMEAU
"Méthodes de calcul de la résistance de vagues (1ère partie)"
Rapport L.H.N. pour I.R.C.N. , E.N.S.M. Nantes , Mars 1976 1976
- [46] P. GUEVEL, G. DELHOMMEAU, D. EUVRARD, S. MARCOUYOUX
"Résistance d'ondes d'un navire de surface"
La Houille Blanche , n°5/6 , 1977 1977
- [47] P. GUEVEL , G. DELHOMMEAU, J.P. CORDONNIER.
"Numerical solution of the Neumann-Kelvin problem by the method of singularities"
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
University of California, Berkeley, 1977 1977
- [48] P. GUEVEL , G. DELHOMMEAU
"Méthodes de calcul de la résistance de vagues (2ème partie)"
Rapport L.H.N. pour I.R.C.N. , E.N.S.M. Nantes , Décembre 1977 1977
- [49] P. GUEVEL, J.C. DAUBISSE, G.DELHOMMEAU
"Oscillations des corps flottants soumis aux actions de la houle"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°78 , Paris 1978
- [50] P. GUEVEL, J.C. DAUBISSE, G. DELHOMMEAU
"Détermination de l'action de la houle sur une structure -
Problème de diffraction-radiation"
Cours de la S.S.H.N.A., E.N.S.M. Nantes, 1978, 1982 1982
- [51] P. GUEVEL, G. DELHOMMEAU, J.P. CORDONNIER
"The Guilloton's method"
Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations,
Washington 1979 , pp 434-448 1979
- [52] P. GUEVEL, G. DELHOMMEAU, J.P. CORDONNIER
"The Guilloton Method applied to fast ship"
Proceedings of the continued Workshop on Ship Wave-Resistance Computations
Izo Shuzenji, Japan , pp 93-100 1980
- [53] P. GUEVEL
"Ecoulements à surface libre - préliminaires maths"
Cours de la S.S.H.N.A., E.N.S.M. Nantes 1980 1980

- [54] P. GUEVEL, A. GREKAS
"Le théorème de Lagally généralisé et ses applications en hydrodynamique navale"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°81 , Paris 1981
- [55] P. GUEVEL, J.C. DAUBISSE, G. DELHOMMEAU
"AQUADYN - Code de calcul de diffraction-radiation"
E.N.S.M. Nantes 1981
- [56] P. GUEVEL, G. DELHOMMEAU, J.C. DAUBISSE, J. BOUGIS
"Méthode rapide de calcul des efforts dus à la diffraction-radiation
de la houle sur des structures entièrement immergées"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°82 , Paris 1982
- [57] P. GUEVEL, G. DELHOMMEAU, A. GREKAS
"Calcul des efforts de dérive sur houle - Contrôle expérimental de la méthode"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°82 , Paris 1982
- [58] P. GUEVEL
"La récupération de l'énergie des vagues"
Sciences et Techniques de l'Armement
Mémorial de l'Artillerie Française , Tome 60 , 1986 , 1er fascicule , n° 232 1986
- [59] R. GUILLOTON
"Contribution à l'étude des Carènes Minces"
Thèse de Doctorat -ès-Sciences
Presses Universitaires de France , Juin 1939 1939
- [60] R. GUILLOTON
"Potential Theory of Wave Resistance of Ships, with Tables for its Calculation"
Transaction S.N.A.M.E. , Vol. 59 , 1951 1951
- [61] R. GUILLOTON
"Compléments sur le potentiel linéarisé avec surface libre
appliqué à l'étude des carènes"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°55 , Paris 1956
- [62] R. GUILLOTON
"L'étude théorique du bateau en fluide parfait"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°64 , Paris 1964
- [63] R. GUILLOTON
"La pratique du calcul des isobares sur une carène linéarisée"
Bulletin de l'A.T.M.A. n°65 , Paris 1965
- [64] M.D. HASKIND
"The hydrodynamic theory of ship oscillating in rolling and pitching"
Prikl. Mat. Mekh, 10 (33-66) 1946
- [65] T.H. HAVELOCK
"The pressure of water waves on a fixed obstacle"
Proc. Roy. Soc., vol A 175 , pp 409-421 , London 1940

- [66] T.H. HAVELOCK
"The drifting forces on a ship among waves"
Phil. Mag, vol. 33, pp 467-475 1942
- [67] T.H. HAVELOCK
"Collected Papers on Hydrodynamics"
Office of Naval Research.
US Governement Printing Office, Washington D.C. 1963
- [68] J.L. HESS, A.M.O.SMITH
"Calculation of non lifting potential flow about arbitrary
three-dimensionnal bodies"
Douglas Aircraft Company 1962
- [69] J.L. HESS, A.M.O. SMITH
"Calculation of potentiel flow about arbitrary bodies"
Progress in Aeronautical Sciences ,
Editor D. Kuchmann Oxford and New York Pergamon Press , Vol.8 pp 66-67 1966
- [70] N. HOGBEN, R.G. STANDING
"Experience in computing wave loads on large bodies "
Offshore Technology Conference, paper N° OTC 2189 , Houston 1985
- [71] HUNG-TAO-SHEN , C. FARELL
"Numerical Calculation of Wave Integrals in the Linearized Theory of Water Waves"
Journal of Ship Research , Vol. 21, number 1 , March 1977 1977
- [72] G. JENSEN , Z-X. MI , H. SOEDING
"Rankine source method for numerical solutions of the
steady wave resistance problem"
16th Symposlum on Naval Hydrodynamics, July 1986 , Berkeley 1986
- [73] F. JOHN
"On the motion of floating bodies (I and II)"
Communication on pure and applied Mathematics , Vol. 2 and 3 New York 1950
- [74] T. KITAZAWA
"On the linearization of the free surface condition"
Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations,
Washington 1979 , pp 493-500 1979
- [75] J.M. KOBUS
"Application de la méthode des singularités au problème des flotteurs
cylindriques soumis à des oscillations harmoniques forcées de faible amplitude"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M.Nantes, Mai 1976. 1976
- [76] B.V. KORVIN-KROUKOWSKY
"Theory of seakeeping"
S.N.A.M.E. , New York 1961

- [77] N.E. KOTCHIN
"On the Wave-making Resistance and Lift of Bodies Submerged in Water"
Transactions of the Conference on the Theory of Wave Resistance
U.S.S.R. , Moscow , 1937
Technical and Research Bulletin N°1-8 , S.N.A.M.E. , August 1951 1951
- [78] K. KUDOU
"The drifting force acting on a three-dimensionnal body in waves"
J.S.N.A. , Japan , Vol. 141 1977
- [79] H. LAMB
"Hydrodynamics"
Dover Publications 1945
- [80] L. LARSSON
"Calculation of potential flow with a free surface"
Swedish Maritime Research Centre SSPA, May 1984 1984
- [81] J.C. LEBRETON, A. MARGNAC
"Calcul des mouvements d'un navire ou d'une plate-forme amarrée dans la houle"
La Houille Blanche , Vol. 23 , pp 379-389 1968
- [82] M. LE BOULLUEC
"Efforts de dérive en diffraction-radiation sans vitesse d'avance"
Diplôme d'Etudes Approfondies, E.N.S.M. Nantes 1983
- [83] P. LEMESLE
"Oscillations de plusieurs corps liés mécaniquement et soumis aux actions de la houle"
Diplôme d'Etudes Approfondies, E.N.S.M. Nantes 1979
- [84] M. LENOIR , D. MARTIN
"Etude théorique et numérique du problème linéarisé du mouvement sur la houle tridimensionnel "
Thèse de 3ème cycle D. Martin ,
E.N.S.T.A. , Rapport de recherche 124 1980
- [85] R.C. MAC CAMY, R.A. FUCHS
"Wave Forces on Piles : A Diffraction theory"
Technical Memorandum Beach Erosion Board, n°69 , Washington 1954
- [86] J.J. MAISONNEUVE
"Calcul de résistance de vagues par une méthode de singularités de Rankine"
Diplôme d'Etudes Approfondies, E.N.S.M. Nantes 1985
- [87] H. MARUO
"The drift of a body floating on waves"
Journal of Ship Research, Vol. 4, 1960, pp 1-10. 1960
- [88] C.C. MEI
"Numerical methods in water-wave diffraction and radiation"
Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 10 1978

- [89] J.H. MICHELL
"Wave Resistance of a Ship"
Philosophical Magazine , Vol. 45, page 113 , London 1898
- [90] B.MOLIN
"Tabuo - Un modèle de comportement des navires ancrés sur point unique"
Thèse de Docteur-Ingénieur, E.N.S.M. Nantes 1981
- [91] K.MORI, H. NISHIMOTO
"On numerical techniques of the Rankine source method"
Proceedings of the continued Workshop on Ship Wave-Resistance Computations
Izo Shuzenji, Japan , pp 69-79 1980
- [92] J.N. NEWMAN
"The drift forces and moment on ships in waves"
Journal of Ship Research, March 1967, pp 51-60 1967
- [93] J.N. NEWMAN
"The evaluation of free-surface Green fonctions"
Fourth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
Washington 1985 1985
- [94] F. NOBLESSE
"The Green Fonction in the Theory of Radiation and diffraction
of regular Water Waves by a body"
J. Eng. Maths 16, pp 137-169 1982
- [95] N.S.M.B.
"Dawson : a new solution for a classical problem"
Marin report, September 1986 1986
- [96] S. OGIWARA, A. MASUKO
"A method of computation for steady ship waves by means of
Rankine sources and its application to hull form design"
International Conference CADMO. Washington , September 1986 1986
- [97] S. OHMATSU
"On the irregular frequencies in the theory of oscillating bodies in a free surface"
Papers of Ship Research Institute , n°48, janvier 1975. 1975
- [98] J.A. PINKSTER, G. VAN OORTMERSSEN
"Computation of the first an second order wave forces
on oscillating bodies in regular waves"
Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,
University of California, Berkeley, 1977 1977
- [99] J.A. PINKSTER
"Low Frequency second order wave exciting Forces on Floating Structures"
Publication n°650 , N.S.M.B. , Wageningen 1983
- [100] Proceedings of the Workshop on Ship Wave-Resistance Computations
D.T.N.S.R.D.C. Bethesda, Maryland 20084 USA
Washington . 13-14 November 1979

- [101] Proceedings of the continued Workshop on Ship Wave-Resistance Computations
Izu Shuzenji, Japan . 10-12 October 1980
- [102] Proceedings of the Second DTNSRDC Workshop on Ship Wave-Resistance
Computations
D.T.N.S.R.D.C. Bethesda, Maryland 20084 USA
Washington . 16-17 November 1983
- [103] J.R. SHEARER , J.J. CROSS
"The Experimental Determinations of the Components of
Ship Resistance for a Mathematical Model".
Quaterly Transactions . The Royal Institution of Naval Architects , Vol. 107 1965
- [104] R.G. STANDING, N.M.C. DACUNHA, R.B. MATTEN
"Mean wave drift forces. Theory and Experiments"
N.M.I. R 124
National Maritime Institute , Feltham Middlesex , December 1981 1981
- [105] M. SÜKAN
"Berechnung der Wellenwirkung auf Kompakte Offshore-Konstruktionen
beliebiger Form"
Schiffstechnik 29 (1982) nr 4 S 135/175 1982
- [106] "Summary of the cooperative experiment on Wigley Parabolic model in Japan"
Proceedings of the Second DTNSRDC Workshop on Ship Wave-Resistance
Computations.
Washington, 1983 , pp 5-35. 1983
- [107] G.SUSBIELLES , C.BERHAULT
"Comparaison des modèles numériques trimensionnels de diffraction-radiation"
Revue de l'Institut Français du Pétrole , Vol. XXXIII , n°4 , Juil-Août 1978 1978
- [108] M. TAKAGI et al,
"A comparison of methods for calculating the motion of a semi-submersible"
Ocean Engineering , Vol.12, n°1, pp 45 1985
- [109] G. VAN OORTMERSSEN
"The motions of a ship in shallow water"
Ocean Engineering , Vol. 3 , pp 221-235 1976
- [110] Y. WATANABE
"Some contributions to the theory of Rolling"
Trans I.N.A. , Vol. 80 1938
- [111] J.V. WEHAUSEN ,E. LAITONE
"Surface waves"
Handbuch der Physik , Vol. IX, 1960 1960
- [112] F. XIA
"Numerical calculations of ship flows, with special
emphasis on the free surface potential flow"
Doctoral Thesis. May 1986. Goeteborg 1986

[113] F.XIA, L. LARSSON

"A calculation method for the lifting potential flow around
yawed surface-piercing 3-D bodies"

16th Symposium on Naval Hydrodynamics , July 1986, Berkeley

1986